Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8870291
Centre d'intérêt: 041

Caron, Normand.

Etude d'une difficulté d'apprentissage en arithmétique / par Normand Caron. -- [Trois-Rivières?] : N. Caron, 1985.
vi, 161 f. ; 28 cm.

Résumé au début du v. "Rapport de recherche présenté à l'Université du Québec à Trois-Rivières. Programme de maîtrise en éducation".
Bibliogr.: f. 160-161.

Vedette(s)-secondaire(s): Université du Québec à Trois-Rivières

Descripteur(s): Arithmétique * Difficulté d'apprentissage * Symbole * Résolution de problème * Primaire (Ordre d'enseignement)

Les enfants de première et de deuxième année du primaire éprouvent de la difficulté à traduire à l'aide de symboles une situation d'addition ou de soustraction et à résoudre des équations faisant appel aux symboles arithmétiques usuels. Même des problèmes d'addition et de soustraction présentés concrètement sont difficilement résolus par des enfants de première et de deuxième année. Quelle est la nature de ces difficultés au niveau du symbolisme rattaché aux opérations d'addition et de soustraction? Quels sont les procédés utilisés par les enfants de cet âge face à des problèmes requérant ces opérations? Comment remédier aux difficultés observées? Telles sont les principales questions auxquelles tente de répondre cette recherche d'ordre didactique. L'auteur a réalisé des entrevues cliniques auprès d'enfants de première et deuxième année pour explorer et préciser le problème. Il a ensuite, par des expérimentations systématiques, testé trois hypothèses dans les classes de première et deuxième année. À la lumière des résultats obtenus, l'auteur avance des hypothèses didactiques qui ouvrent la voie à une éventuelle résolution du problème.

Type de document: r

EDUQ 8870291

Université du Québec à Trois-Rivières

Fiche-résumé de travail de recherche de 2e cycle

☐ Mémoire
☒ Rapport de recherche
☐ Rapport de stage

Nom du candidat: Normand Caron

Diplôme postulé: Maîtrise en éducation

Nom du directeur de recherche: Pierre-Léon Trempe

Nom du co-directeur de recherche (s'il y a lieu):

Titre du travail de recherche: Etude d'une difficulté d'apprentissage en arithmétique.

EIUQ 8870291

Résumé:*

Ce projet de recherche a pour origine l'énoncé des difficultés d'apprentissage des enfants de première année primaire en mathématique, formulées par des enseignantes de mon milieu de travail. Comme conseiller pédagogique en cette discipline, je voulais, lorsque j'entrepris ce mémoire, étudier la difficulté la plus importante puis suggérer aux enseignantes des moyens d'intervention appropriés.

Les techniques de l'entrevue et du questionnaire écrit me permirent d'identifier le problème (d'apprentissage et d'enseignement) considéré le plus important par ce groupe d'enseignantes. Ce problème s'énonçait comme suit: les enfants éprouvent de la difficulté à traduire à l'aide de symboles une situation d'addition ou de soustraction; la résolution d'équations où les opérations et les symboles arithmétiques usuels (+, -, =) sont impliqués est elle aussi cause de difficultés.

Des entrevues cliniques avec des enfants éprouvant cette difficulté, et des lectures, m'amènent à observer que l'interprétation des symboles constitue un obstacle à la compréhension. De plus, des sujets rencontrés en entrevue éprouvent aussi des difficultés lorsque placés dans des situations d'addition ou de soustraction sur un ensemble d'objets concrets et cela, même en l'absence de symboles arithmétiques. La difficulté est plus marquée lorsqu'une partie des objets de l'ensemble est non visible et non manipulable effectivement («totalité absente») par le sujet. La difficulté semble beaucoup moins grande pour ce dernier lorsque la totalité des objets de l'ensemble est visible et manipulable effectivement («totalité présente»). De plus, il semble exister un «décalage» chez certains enfants, entre la situation concrète et son écriture sous forme d'équation.

Un protocole expérimental pour mettre à l'épreuve ces observations, traduites sous forme d'hypothèses, conduira aux conclusions suivantes pour l'échantillon choisi, soit

des classes complètes d'enfants de première et de deuxième année:

- certaines situations concrètes d'addition et de soustraction où la «totalité est absente» sont significativement moins réussies que les situations correspondantes où la «totalité est présente»; cette hypothèse n'est cependant pas vérifiée pour quelques formes de situations concrètes;

- un support concret (petits cubes) n'aide pas les sujets à réussir significativement mieux la plupart des situations concrètes et des équations correspondantes présentées;

- chacune des situations concrètes présentées (sauf une exception) n'est pas significativement mieux réussie que l'équation qui lui correspond. Cependant, un plus grand nombre de sujets de l'échantillon de classes de première année réussissent mieux l'ensemble des situations concrètes que l'ensemble des équations correspondantes;

Des hypothèses didactiques proposent des alternatives au problème énoncé initialement. Enfin, en conclusion, les résultats décrits ci-dessus sont interprétés; des questions sont soulevées. Une réflexion sur la fonction du conseiller pédagogique en regard d'une telle démarche de recherche est amorcée.

Normand Roy

Signature du candidat

Date: Le 11 juin 1984

Signature du directeur de recherche

Date: 15/04/85

Signature du co-auteur (s'il y a lieu)

Date:

Signature du co-directeur (s'il y a lieu)

Date:

UNIVERSITE DU QUEBEC

ETUDE D'UNE DIFFICULTE D'APPRENTISSAGE EN ARITHMETIQUE

par

NORMAND CARON

Programme de maîtrise en éducation

Rapport de recherche

présenté à

L'Université du Québec à Trois-Rivières

Avril 1985

ETUDE D'UNE DIFFICULTE D'APPRENTISSAGE EN ARITHMETIQUE

INTRODUCTION

Dans le cadre de mes activités de conseiller pédagogique en mathématique, il m'arrive souvent de répondre à des questions d'ordre didactique posées par les enseignantes: «Comment amener l'élève à acquérir tel concept, telle opération, telle technique de calcul?». Ce rapport de recherche s'organise à partir de l'une de celles-ci. Son point de départ est une difficulté rencontrée par des enseignantes de première année en arithmétique. A l'origine, le problème tient à la difficulté que les enfants éprouvent à traduire à l'aide de symboles une situation d'addition ou de soustraction et à résoudre des équations faisant appel aux symboles arithmétiques usuels.

La symbolisation, qui constitue un moyen privilégié d'expression de la pensée mathématique, peut aussi faire obstacle à la compréhension des opérations arithmétiques. Des auteurs ont fait part de certaines observations à cet égard (Behr et al, 1976): des erreurs d'interprétation des signes arithmétiques et des équations ont déjà été repérées et identifiées. Les symboles arithmétiques sont souvent introduits trop tôt (Dienes, 1970) ou mal à propos (Dumont, 1967). La signification réelle des symboles lui échappant, l'élève ne comprend pas; le maître se voit obligé «de lui faire acquérir une habitude rigide» (Aebli, 1966: 49) dans le maniement des symboles.

En poussant plus loin la recherche, ce rapport montre que des enfants éprouvent aussi des difficultés à résoudre certains problèmes. Des problèmes d'addition et de soustraction même présentés concrètement, en éliminant l'usage de symboles, sont difficilement résolus par des enfants de première et de deuxième année.

Quelle est la nature de ces difficultés au niveau du symbolisme rattaché aux opérations d'addition et de soustraction (équation, signes +, - , =)? Quels sont les procédés utilisés par les enfants de cet âge face à des problèmes requérant ces opérations? Comment remédier aux difficultés observées? Voilà les principales questions auxquelles tente de répondre cette recherche d'ordre didactique.

Après avoir délimité le problème avec des enseignantes (chapitre I), des entrevues cliniques auprès d'enfants de première et de deuxième année ont été réalisées pour explorer et préciser le problème (chapitres II et III). Par la suite, des expérimentations systématiques dans des classes de première et de deuxième année permirent de tester certaines hypothèses (chapitre IV). A la lumière des résultats obtenus, des hypothèses didactiques furent avancées. Ces dernières ouvrent la voie à une éventuelle résolution du problème évoqué initialement par les enseignantes (chapitre V). En conclusion de ce mémoire, les résultats sont interprétés en terme didactique; des questions et des pistes de recherche sont enfin esquissées pour des recherches futures.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, pour son soutien moral, ses conseils et sa disponibilité de tous les instants, mon directeur de mémoire, Pierre-Léon Trempe. Je lui suis reconnaissant de m'avoir facilité les apprentissages que j'ai faits en réalisart cette oeuvre. Le respect qu'il a eu pour ma démarche personnelle et la liberté qu'il m'a accordée m'ont stimulé.

Je remercie Messieurs Blaise Balmer et Paultre Ligondé, tous deux professeurs au département des sciences de l'éducation. Au premier, je suis reconnaissant de l'enthousiasme avec lequel il m'a aidé à interpréter Piaget. Au second, les précieux conseils sur l'application des statistiques dans l'interprétation des données.

Je n'oublierai jamais les nombreux enfants rencontrés au cours de cette recherche. Inutile de dire qu'ils m'ont beaucoup appris. Je remercie aussi les enseignantes suivantes qui ont assisté activement aux expérimentations dans leur classe respective: Françoise Paquin, Georgette Martel, Rita Pagé, Michèle Dumont, Lorraine Bellerive, Micheline Désilets et Janine Garceau. Merci aussi à Manon Beaudry Defoy, qui a bien voulu assurer la dactylographie de ce mémoire: je lui dois beaucoup pour avoir su lire mes manuscrits parfois indéchiffrables.

Enfin, je dédie ce mémoire à mon épouse, Louise, et à mes deux enfants, Mélanie (11ans) et Louis-Philippe (7 ans). Mon épouse m'a toujours soutenu et encouragé dans cette recherche, malgré les moments difficiles. Quant à Mélanie et Louis-Philippe, ils m'ont aidé à mettre au point certaines expériences faites avec les enfants qui furent au centre de cette recherche.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION ii

REMERCIEMENTS iv

TABLE DES MATIERES v

CHAPITRE I 1

1. Nature et origine du projet de recherche 1
2. Identification du problème initial 2
3. Les opérations d'addition et de soustraction: point de vue mathématique 7
4. Questions de recherche et expérimentation 11

CHAPITRE II 26

1. Introduction 26
2. Interprétation des symboles arithmétiques 27
3. Situations d'addition et de soustraction présentées dans un contexte concret 33
4. En résumé 37

CHAPITRE III 39

1. Introduction 39
2. Première expérimentation 40
3. Deuxième expérimentation 45
4. Troisième expérimentation 71

CHAPITRE IV 77

1. Introduction 77
2. Les hypothèses de départ motivant l'expérimentation 78
3. Le modèle d'expérimentation pour les classes de première année 79
4. Les résultats obtenus relativement à chacune des hypothèses, et leur interprétation 86
5. Relance de l'expérimentation au sujet de la première hypothèse dans deux classes de deuxième année 103

CHAPITRE V 111

1. Introduction 111
2. Synthèse des résultats obtenus 111
3. Quelques propositions didactiques 117

CONCLUSION 120

TABLE DES MATIERES (suite)

ANNEXES 129

1. Questionnaire 129
2. Lettre accompagnant le questionnaire 132
3. Analyse des réponses et commentaires sur les opérations arithmétiques 133
4. Réactions Lou et Pat 134
5. Perception d'enfants face au symbolisme 135
6. Procédure utilisée et réactions des sujets face à l'égalité numérique 136
7. Description de la première expérimentation 138
8. Représentation de la première expérimentation 140
9. Représentation des types de problèmes 141
10. Description de la troisième expérimentation 142
11. Représentation des problèmes modifiés 144
12. Tableau des résultats des sujets pour les problèmes de type standard et modifié 145
13. Trois types de pédagogie 146
14. Description de la séance 1 (première partie) 147
15. Description de la séance 1 (deuxième partie) 148
16. Description de la séance 2 149
17. Description de la séance 3 153
18. Description de la séance 4 154
19. Description de la séance 5 157
20. Exemple d'un processus d'intériorisation 158
21. Fréquence de réussite aux problèmes (f_p) en fonction de la fréquence de réussite aux équations (f_e) pour les sujets de l'échantillon (N=74) 159

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 160

CHAPITRE I

1. Nature et origine du projet de recherche

La nature de ma fonction comme conseiller pédagogique m'amène à être consulté par des enseignants confrontés à des problèmes d'enseignement. Etant donné que j'exerce cette fonction dans le champ de l'enseignement des mathématiques, les problèmes énoncés par les enseignants ont des rapports très étroits avec l'apprentissage des enfants en mathématique.

Au moment où débuta cette recherche, en mars 1981, je voulais lui donner un caractère pratique. Je me suis alors proposé d'étudier un problème rencontré par des enseignants dans leur enseignement des mathématiques (et donc par des enfants dans leur apprentissage). Je voulais ainsi joindre à mon expérience personnelle la rigueur d'une méthode scientifique pour aborder un phénomène dans ma pratique comme conseiller pédagogique.[1]

Ce rapport est le compte rendu d'une démarche de recherche; c'est ainsi que le problème, tel qu'énoncé initialement, se transformera au cours de la recherche. Je présenterai donc, dans ce présent rapport, les moyens utilisés pour identifier le problème à étudier, de même que ce problème initial. Puis, les transformations successives de ce problème suite à des cueillettes et à des traitements de données successifs. C'est ainsi que des questions nouvelles ont surgi au cours de la recherche, et ont provoqué une transformation du problème initial. Ces questions seront énoncées dans le texte qui suit, telles qu'elles se sont présentées dans le temps. On remarquera, à la lecture, que le problème, de même que les questions que la recherche suscite, se

[1] Cette recherche s'est faite dans des écoles primaires de la Commission scolaire de Chavigny (région de Trois-Rivières). Pour respecter la confidentialité, j'éviterai de préciser le nom des enseignantes et des écoles impliquées dans ce projet.

précisent au fur et à mesure que de nouvelles données apparaissent. C'est à la fin de ce rapport, après que le problème aura été bien posé, que seront proposées certaines solutions d'ordre didactique au problème identifié initialement.

2. Identification du problème initial

2.1 Procédés utilisés: l'entrevue et le questionnaire écrit

J'ai d'abord voulu identifier les problèmes rencontrés par des enseignantes dans leur enseignement. Le groupe-cible choisit fut celui des enseignantes de première année, notamment parce que les problèmes rencontrés au début de l'apprentissage des mathématiques à l'école m'intéressaient et qu'ils m'apparaissaient déterminants pour la suite de la scolarité.

Au moment où j'entrepris ce travail de recherche, il y avait 15 classes de première année. Le moment choisi pour identifier ces problèmes était, à mon avis, bien choisi: le mois de mars. A ce moment, les enseignantes connaissent explicitement, sinon implicitement, les problèmes rencontrés par les enfants en mathématique.

J'ai alors choisi de rencontrer quatre enseignantes individuellement; les données recueillies lors de ces entrevues me permirent par la suite de construire un questionnaire écrit s'adressant aux onze autres enseignantes.

Ces entrevues et ce questionnaire avaient pour but de délimiter le ou les problèmes qui paraissaient les plus répandus.

Avec leur consentement, je rencontrais donc les enseignantes en entrevue. Je leur expliquais que mon but était de faire un listing des difficultés qu'elles rencontrent (et/ou que les enfants éprouvent) en enseignement des mathématiques. Je leur faisais aussi part de mon intention d'en faire une étude en vue de trouver des solutions.

Voici comment débutait l'entrevue. (E et S désignent respectivement l'expérimentateur et le sujet dans tout le texte de ce rapport; ici, Ens désigne l'enseignante).

E: «Tu te souviens pourquoi je viens te rencontrer ?»
Ens: (répond par oui ou par non, s'explique un peu).
E: (corrige l'interprétation et, s'il y a lieu, réexplique).

Je n'intervenais que pour tenter de clarifier la pensée des enseignantes interviewées, sans juger, ni tenter de «régler» les problèmes. Si l'enseignante demandait que faire ou comment faire avec cette difficulté, je répondais plutôt: «Comment tu fais pour t'en sortir, toi ?»

La majeure partie de l'entrevue se passait à énoncer sans ordre les difficultés rencontrées, sans tenir compte de leur degré de difficulté. A la fin de l'entrevue, ces difficultés étaient ordonnées avec l'aide de l'enseignante, pour identifier leur importance.

On obtenait donc un listing des difficultés par ordre d'importance.

C'est à partir de ce dernier, que fut élaboré le questionnaire (voir annexe 1: questionnaire). Nous pouvons observer que les difficultés concernent toutes l'arithmétique. Pour plus de clarté, elles ont été regroupées en catégories: nombre, numération, et opérations d'addition et de soustraction.

Ce questionnaire, une fois rédigé, fut acheminé à chacune des enseignantes de première année non rencontrées en entrevue. Une lettre, s'adressant à la direction de l'école et à l'enseignante (voir annexe 2) accompagnait ce questionnaire. Neuf enseignantes sur les onze visées répondirent à celui-ci.

Les résultats furent compilés. Le tableau ci-dessous indique, pour chacune des catégories, le nombre de répondants(y compris les personnes rencontrées en entrevue) ainsi que le pourcentage de répondants ayant spécifié cette catégorie comme étant la difficulté la plus importante.

Tableau 1: Nombre de répondants et pourcentage de répondants en fonction des catégories de difficulté.

Catégories de difficulté	Nombre de répondants	Pourcentage %
Nombre	2	15
Numération	4	31
Opération	7	54
Total	13	100

Nous observons que 54% des répondants avaient identifié les opérations comme étant la catégorie de difficultés la plus importante.

2.2 Analyse des résultats de l'entrevue et du questionnaire

Mon attention se porta donc sur la catégorie «opérations» puisqu'il semblait que celle-ci constituait la difficulté la plus importante. C'est ainsi que je fus amené à l'explorer plus à fond. L'analyse des réponses et commentaires apportés par les enseignantes pour les «opérations arithmétiques» (cf. annexe 3) permet de préciser un peu plus le problème initial. On constate en effet que:

1- les difficultés se situaient au niveau de l'écriture symbolique des opérations; plus précisément lors de la traduction par les enfants, avec des symboles, d'une situation réelle (réalité concrète) ou représentée (diagramme);

2- des enfants éprouvaient des difficultés soit dans l'utilisation des symboles arithmétiques usuels (ex.: 9 + 4 = 13, 3 + □ = 5, ...) soit pour résoudre des équations (ex.: 5 - 3 = □ , 3 + □ = 5, 5 - □ =2, ...).

2.3 Le problème initial

Après analyse, le problème initial portait donc sur la difficulté des enfants à traduire une situation (réelle ou représentée) d'addition ou de soustraction à l'aide de symboles et à résoudre des équations faisant appel aux symboles arithmétiques usuels: +, -, =.

Cependant, je soupçonnais que ce problème ne pouvait constituer que la pointe de l'iceberg. Certaines lectures (Dienes, 1970; Dumont, 1967) m'avaient convaincu qu'il ne fallait pas introduire les signes arithmétiques (+, -, =) trop tôt, «avant que les enfants aient compris ce que représentent ces problèmes (d'addition et de soustraction)» (Dienes, 1970: 109). D'autres auteurs renchérissent et ajoutent qu'introduire «le signe «=» trop tôt et mal à propos peut être désastreux»! (Dumont, 1967: 33).

Ces lectures m'incitèrent à rechercher en-deça du symbolisme, la nature du problème, particulièrement au niveau des opérations mentales requises et même préalables à la réalisation d'additions et de soustractions.

3. Les opérations d'addition et de soustraction: point de vue mathématique

3.1 L'addition et la soustraction

L'opération d'addition des nombres repose sur l'opération réunion des ensembles n'ayant pas d'éléments communs (Dienes, 1970). Ainsi, s'il y a trois garçons qui se réunissent avec quatre filles pour former une équipe, on peut écrire, en terme d'ensemble: $\{\text{garçons}\} \cup \{\text{filles}\} = \{\text{équipe}\}$. Le palier suivant d'abstraction se situe au niveau des nombres: $N\{\text{garçons}\} + N\{\text{filles}\} = N\{\text{équipe}\}$[2]. On peut alors écrire la relation $3 + 4 = 7$, qui se lit "quatre plus trois égale sept."

L'opération soustraction, pour sa part, est le correspondant numérique de l'opération permettant de trouver l'ensemble-différence de deux ensembles (Dienes, 1970). Supposons que l'on considère l'ensemble des membres d'une famille constituée du père, de la mère et de deux enfants (un garçon et une fille). Considérons dans cet ensemble, le sous-ensemble des personnes de sexe féminin. Si on enlève à l'ensemble des membres de la famille, le sous-ensemble des personnes de sexe féminin, on obtient l'ensemble-différence:

---

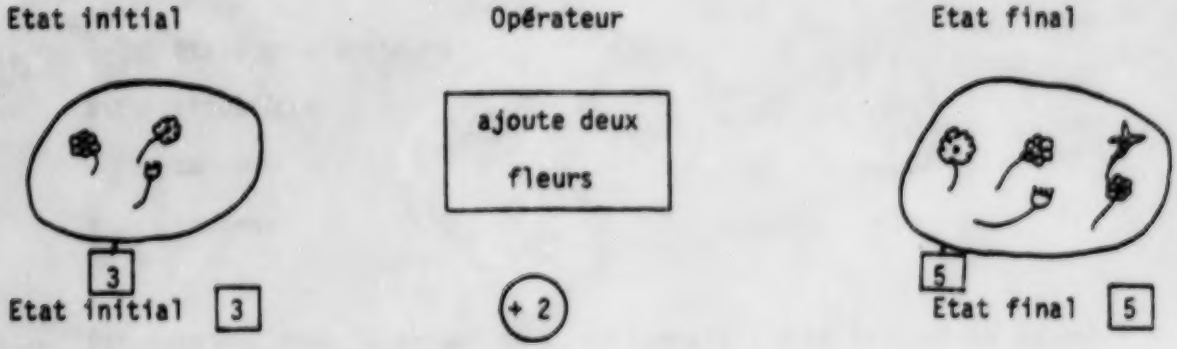
[2] $N\{\text{équipe}\}$ désigne le nombre d'élément de l'ensemble constitué des membres de l'équipe.

symboliquement, $\{famille\} \setminus \{sexe\ féminin\} = \{sexe\ masculin\}$. Ce qui correspond, au niveau des nombres, à: $N\{famille\} \setminus N\{sexe\ féminin\} = N\{sexe\ masculin\}$; et plus succintement, à la relation $4 - 2 = 2$ qui se lit «quatre moins deux égale deux».

3.2 Les opérateurs arithmétiques

La notion générale d'opérateur[3] est appliquée par certains auteurs (Dienes, 1970; Wheeler, 1967; Dezaly, 1973) aux opérations d'addition et de soustraction. Dans ces derniers cas, qui sont des cas particuliers d'opérateurs, un état initial (par exemple un ensemble de fleurs) est modifié par un opérateur (ajouter une, deux, ... fleurs; enlever une, deux, ... fleurs) en un et un seul autre état appelé état final.

Schématiquement, on a:



---

3 Un opérateur réalise une action ou opération dans un ensemble donné. Cette opération transforme chacun des éléments de cet ensemble en un et un seul autre élément du même ensemble. Quant à l'opérateur, il fait partie d'un ensemble d'opérateurs.

En utilisant cette idée, six situations différentes peuvent se présenter si l'on considère les opérateurs additifs (ajouter) ou soustractifs (enlever). Ces six situations sont présentées dans le tableau 2, sous forme d'exemples où les états et les opérateurs sont des nombres naturels: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Tableau 2: Diverses situations concernant les opérateurs.

Sit \ E-O	Etat initial	Opérateur	Etat final
1	c : 5	c : ajouter 3	i : ?
2	c : 5	i : ?	c : 8
3	i : ?	c : ajouter 3	c : 8
4	c : 8	c : enlever 3	i : ?
5	c : 8	i : ?	c : 5
6	i : ?	c : enlever 3	c : 5

E-O: états et opérateurs

Sit: situations

c : connu

i : inconnu

Par exemple, dans la situation 1, on connaît l'état initial «5» auquel l'on ajoute «3» : le problème consiste à retrouver l'état final.

Pour parvenir à résoudre ces six types de problèmes, et donc à opérer sur les nombres, un certain nombre de savoir-faire sont nécessaires (Dienes, 1970):

- être capable de nommer la classe d'équivalence[4] à laquelle appartient un ensemble donné;

- être capable de déterminer quel nombre cardinal précède ou suit un autre nombre cardinal: par exemple, construire un ensemble qui a un élément de moins ou un élément de plus qu'un ensemble donné;

- être capable de déterminer, étant donné deux nombres cardinaux (par exemple 7 et 9), quel nombre est supérieur à l'autre et de combien il lui est supérieur.

A l'issue de ces lectures, deux questions émergèrent relativement au problème initial (cf. 2.3). Ce sont ces deux questions qui donnèrent lieu à une première expérimentation auprès d'enfants de première année.

---

4 Les ensembles entre lesquels on peut établir une correspondance biunivoque appartiennent à une même classe; c'est ainsi que par exemple, le nombre cinq est la classe de tous les ensembles à cinq éléments.

4. Questions de recherche et expérimentation

4.1 Questions de recherche

Le symbolisme représentant les opérations arithmétiques d'addition et de soustraction (+, -), de même que le signe égal (=) avait peut-être été introduit prématurément. Ce qui m'amena à me poser les deux questions suivantes:

- les enfants possédaient-ils les savoir-faire nécessaires pour opérer sur les nombres (par exemple, étant donné deux tas de cubes, l'un de sept et l'autre de neuf cubes: 1° être capable de dénombrer le nombre de cubes de chacun des tas; puis 2° de dire lequel des deux tas a le plus de cubes. 3° Pouvoir répondre à la question: «Combien ce tas (9) a de cubes de plus que ce tas (7)»)?

- quelles sont les réactions des enfants devant des problèmes d'addition et de soustraction (voir tableau 2, para 3.2) présentés sous leur forme concrète, sans faire appel au symbolisme rattaché habituellement à ces opérations (+, -, =)?

L'expérimentation auprès de cinq élèves de première année (Lou, Pat, Ibe, Ann, Dav) rencontrés en entrevue individuelle m'aidèrent à explorer ces deux questions.

4.2 L'expérimentation

4.2.1 Remarques au sujet de cette expérimentation

Cette expérimentation eut lieu entre le 20 et le 30 avril 1981, presqu'au terme de l'année scolaire 1980-1981. Les élèves étaient sélectionnés par leur enseignante comme étant de ceux éprouvant des difficultés avec les opérations.

Etant donné que cette expérimentation avait un caractère surtout exploratoire, je n'ai pas appliqué la même procédure avec tous les sujets. Ainsi, le questionnement et les situations présentées se sont modifiéees d'une rencontre à l'autre et même en cours d'entrevue. Ces dernières n'ont pas été enregistrées à l'aide d'un magnétophone: je notais par écrit les réactions des sujets, que je complétais après la rencontre.

Pour faciliter la compréhension, je décrirai en deux parties distinctes les procédures et les réactions des sujets (cf. 4.2.2.1 et 4.2.2.2). La première partie concerne la première question sur les savoir-faire et la seconde, la deuxième question sur les réactions des sujets confrontés à des problèmes concrets.

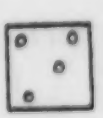
4.2.2 Description de l'expérimentation et de ses résultats

4.2.2.1 Première partie

Cette première partie de l'expérimentation avait pour but d'explorer la première question: «Les enfants possèdent-t-ils les savoir-faire nécessaires pour opérer sur les nombres?»

Je décrirai d'abord les procédures utilisées avec les sujets, ensuite leurs réactions et l'interprétation de celles-ci.

a. Les procédures utilisées

Je présente aux sujets une série de cartes où les nombres cardinaux de un à neuf sont représentés par une configuration de points, du type  , , ...

Je demande au sujet: 1- de placer les cartes en ordre; 2- une fois les cartes ordonnées, je montre deux cartes qui se suivent (par exemple, les cartes représentant

5 et 6) ou deux cartes séparées par une carte (par exemple, les cartes représentant 7 et 9). Je demande alors: «quelle carte a le plus de points des deux cartes? (que je montre)?» 3- je commence une suite de petits cubes placés en tas ainsi: un cube, deux cubes, trois cubes, etc. Puis, je demande au sujet: 1° de continuer la suite avec des petits cubes; 2° une fois la suite construite, je montre deux tas de cubes qui se suivent dans la suite, et je demande: «Quel tas a le plus de cubes?» et «Combien de cubes de plus contient ce tas (relativement à l'autre tas)?» 3° je montre un tas de cubes et demande «Trouve le tas de cubes qui contient un cube de plus que ce tas». «Trouve le tas de cubes qui contient deux cubes de plus que ce tas».

b. Réactions des sujets

Tous les sujets rencontrés (Lou, Pat, Ibe, Ann, Dav) ont pu placer en ordre les cartes (les sujets qui ont eu à compléter la suite de cubes (Lou, Pat, Ann, Dav) ont tous réussi). Ils peuvent identifier combien de points possède une carte et trouver entre deux cartes laquelle possède le plus de points.

Cependant, les sujets (Lou, Pat, Ibe) à qui nous avons demandé, une fois la suite construite: «Combien de points de plus que cette carte contient cette carte-ci (en montrant les deux cartes)?» ont éprouvé certaines difficultés.

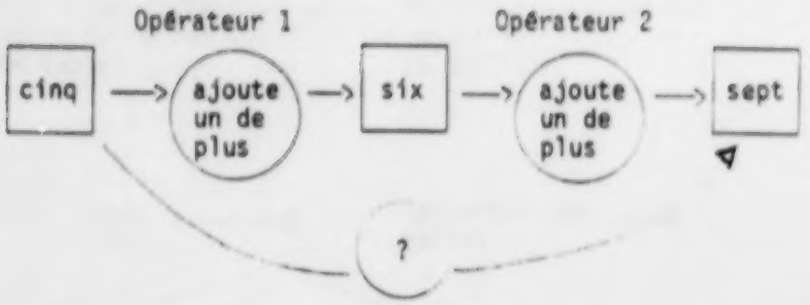
Ainsi Lou peut trouver quelle carte a le plus de points entre deux cartes voisines. Mais à la question «Combien de plus?» le sujet répond par le nombre de points que contient la carte qui a le plus de points. Quant à Pat, il peut répondre à cette question mais hésite quand les cartes sont non voisines.

D'une façon similaire, Ibe à qui je demande de me montrer, une fois la suite construite, une carte qui a «un point de plus» (ou de moins) qu'une autre carte que je montre, répond sans hésiter. Cependant, quand je lui demande de me montrer la carte qui a «deux points de moins» (ou de plus), elle hésite, et montre la carte qui a un point de moins (ou de plus) dans la suite.

c. Interprétation des réactions

En terme d'états et d'opérateurs (Dienes, 1972), les réactions des trois derniers sujets (Lou, Pat, Ibe) pourraient s'interpréter de la façon suivante:

Lou pouvait identifier les états «cinq» et «six». Cependant, il ne pouvait identifier l'opérateur qui avait agi sur l'état «cinq» pour obtenir l'état «six». Il confondait les états et les opérateurs (Dienes, 1972). Quant à Pat, c'est la situation suivante qui lui était présentée:

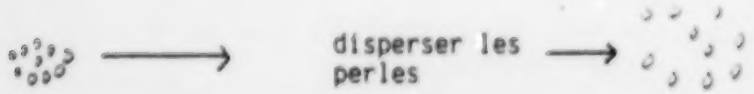


La situation de Ibe était semblable. En fait les deux sujets éprouvaient de la difficulté «à combiner deux opérateurs additifs (opérateur 1 et 2) et (...) déterminer l'opérateur unique (? dans le schéma ci-dessus) qui causerait le même changement d'état» (Dienes, 1972: 33).

Si l'on convient d'appeler stade opératoire la capacité d'opérer sur des opérateurs (Dienes, 1972), nous avons alors de bonnes raisons de croire que les sujets Ibe, Pat et Lou n'ont pas atteint ce stade. Ce stade coïncide avec la capacité d'inverser les opérateurs (Dienes, 1972), c'est-à-dire, combiner un opérateur à un autre opérateur, et qui ramène à l'état de départ. Par exemple, suivant le schéma:
état 1 ——> (op) ——> état 2 ——> op ——> état 1

Cette dernière capacité, celle d'inverser les opérateurs, présuppose l'existence et la connaissance d'un type d'opérateur qui ne fait rien (Dienes, 1972). Comme par exemple celui qui change la position spatiale ou géométrique d'objets sans changer leur nombre.

état 1 (un certain nombre de perles sur une table) ⟶ opérateur (modifier la position) ⟶ état 2 ≡ état 1



Piaget qui a étudié auprès des enfants ce principe qu'il appelle invariance du nombre ou conservation de quantités discontinues, considère la conservation comme la base même de toute connaissance arithmétique. Un nombre n'est «intelligible que dans la mesure où il demeure identique à lui-même quelle que soit la disposition des unités dont il est composé» (Piaget, 1967: pp. 16-17).

Ces dernières remarques m'amenèrent également, au cours de cette même expérimentation, à profiter d'une occasion fortuite qui se présentait pour vérifier la conservation. Or, en dépit des difficultés énumérées plus haut, Pat et Lou avaient acquis ce principe si l'on en juge par leurs réactions. Il y a un tas de neuf cubes sur la table... je les éparpille et demande à Lou s'il y en a plus maintenant. Lou me répond simplement: «... c'est pareil, la même chose!». Pat, dans une situation semblable, répond: «... y en a pareil! C'est comme si t'es debout ou couché, t'as la même grandeur!».

d. Résumé

Cette première partie de l'expérimentation avait pour but de vérifier si des sujets ayant des difficultés avec les opérations possédaient les préalables nécessaires pour opérer sur les nombres (cf. para. 3.2). Il me semblait alors que les sujets rencontrés possédaient un certain nombre de ces préalables, dont celui de la conservation (cf. Lou et Pat). Cependant, dès que l'on entamait le stade opératoire, c'est-à-dire, dès que ces mêmes sujets avaient à opérer sur des opérateurs, des difficultés semblaient apparaître.

4.2.2.2 Deuxième partie

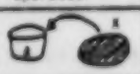
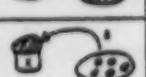
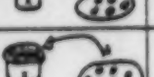
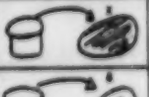
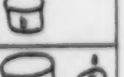
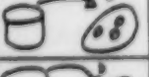
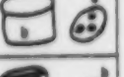
Cette seconde partie de l'expérimentation avait pour but d'observer les réactions d'enfants devant des problèmes d'addition et de soustraction présentés sous leur forme concrète sans faire appel au symbolisme rattaché habituellement à ces opérations (+, -, =). Je traiterai plus précisément des réactions de deux sujets, Lou et Pat. Ces deux enfants me permirent mieux que les sujets Ibe Ann et Dav, d'entrevoir quelques pistes intéressantes pour la suite de la recherche.

a. Les procédures utilisées avec Lou et Pat

J'ai présenté à ces deux sujets les six situations déjà décrites (cf. 3.2, tableau 2). Avec Pat cependant, les six situations n'ont pas toutes été présentées, comme nous le verrons; de plus, de légères modifications à la procédure ont été faites en cours d'entrevue.

D'une façon générale, l'état initial des situations est matérialisé par un plat non transparent avec couvercle et contenant un certain nombre de cubes. L'opérateur est matérialisé par l'expérimentateur qui intervient pour ajouter ou enlever un certain nombre de cubes à l'état initial, pour transformer cet état en un état final. Le tableau 3 représente ces six situations.

Tableau 3: Représentation de l'expérimentation

Situation	Etat initial	Opérateur	Etat final
1			
2			
3			
4			
5			
6			

a, b: nombre de cubes connu (à la vue du sujet)

x: nombre de cubes inconnu (plat avec couvercle)

Pour la situation 1 par exemple, l'expérimentateur dépose a cubes dans le contenant; ces cubes sont comptés par le sujet (état initial connu). L'expérimentateur ajoute aux a cubes, sans que le sujet voie, x cubes. Puis, il montre l'état final, soit les b cubes que contient le contenant. L'expérimentateur demande au sujet: «Combien j'ai ajouté de cubes dans le contenant?»

b. Réactions des sujets

Le tableau de l'annexe 4 décrit les réactions des sujets en regard des situations que nous leur avons présentées. Comme je l'ai dit, je n'ai pas présenté toutes les situations à Pat, c'est pourquoi il y a des vides dans ce tableau. Le procédé utilisé par le sujet est décrit sommairement lorsque cette observation a été faite. En d'autres occasions, je n'ai pu noter que la réponse finale du sujet.

Si on observe ce tableau, on remarque que Lou n'a pas réussi les situations du type 4 et 6, $a - x = b$ et $a - b = x$. Pour le type $a - x = b$, ce sujet semble porté à procéder par essai et erreur. Le même sujet réussit $7 + x = 10$ et non $14 + x = 24$, pourtant du même type 1: il m'apparut alors que la grandeur des nombres impliqués pouvait être un facteur déterminant la réussite ou la non-réussite de ce type de problème.

Quant à Pat, il avait réussi toutes les situations présentées (1, 2, 5, 6). Sa réussite à la situation 6, a - b = x, pourrait s'expliquer par le fait que les nombres utilisés étaient relativement petits (5 - 2 = x). Au cours de l'entrevue avec ce dernier, je me suis demandé comment il réagirait devant des équations représentant quelques-unes de ces situations (1 à 6). Spontanément, j'ai alors présenté à Pat quelques équations. Voici donc quelques réactions de ce sujet:

J'écris 2 + □ = 5 et demande à Pat s'il peut faire cela ... Pat écrit alors 3 dans □. Puis, j'écris ensuite □ + 2 = 7 et demande: «Peux-tu faire cela?» Pat répond, après avoir cherché: «Je le sais pas...». Ces équations sont associées aux types 1 et 2 respectivement.

c. Analyse des réactions de Lou et Pat pour la seconde partie de l'expérimentation

A l'issue de cette partie de l'expérimentation, nous remarquons que certaines situations (type 4 et 6) ne sont pas résolues par Lou, malgré l'absence de tout symbolisme; de même, la situation de type 1, avec des nombres relativement grands de cubes n'est pas résolu, alors qu'elle est

résolue par ce même sujet avec des nombres plus petits. Ces observations tendaient à renforcer l'hypothèse que les difficultés de Lou se situaient en-deçà du symbolisme, au niveau des opérations concrètes d'addition et de soustraction.

De plus, ce même symbolisme constituait un obstacle pour Pat. Il pouvait résoudre une situation concrète de type 2 sans référence au symbolisme et non la situation correspondante sous forme d'équation ($\square + 2 = 7$).

d. Observations faites auprès de Ibe et Ann [5]

Le contexte des situations présentées à Lou et Pat fut modifié lorsque j'ai rencontré ces deux sujets. Les situations sont de même type (cf. tableau 3), mais le contexte est plus significatif; c'est celui du jeu de billes. Par exemple, la situation de type 2 ($x + a = b$) était la suivante:

«Voici un sac de billes (E présente effectivement un sac fermé contenant un nombre x de billes inconnu du sujet) ...

---

[5] Je n'ai pas utilisé les procédures présentées dans ce paragraphe avec Dav:c'est pourquoi aucune observation n'apparaît à son sujet.

En jouant aux billes, tu gagnes cinq (5) billes (E place 5 billes près du sac). Tu as maintenant huit (8) billes. Combien t'en avais dans ton sac au début de la partie?» (Le sujet peut manipuler des billes pour résoudre ce problème).

J'avais utilisé cette procédure pour certaines situations, mais d'une façon très peu systématique, de sorte que je n'ai pu recueillir d'observations détaillées. Pour les différents types de situations (cf. tableau 3) présentées à Ann et Ibe dans ce contexte, voici quelques réactions:

1- Ibe réussit les types 1, 4, 5 et 6 et non le type 2 présenté ci-dessus;
2- Ann réussit le type 4 et non le type 1, sauf pour les cas où b = a + 1 (par exemple 5 + x = 6, 6 + x =7).

e. Résumé de la deuxième partie de l'expérimentation

Ces dernières observations faites auprès de Ibe et Ann, de même que celles faites auprès de Lou , m'amenèrent à penser que, sous certaines conditions et en l'absence de tout symbolisme, certaines situations (type 1 pour Ann et Lou , type 2 pour Ibe, types 4 et 6 pour Lou dans un

contexte «concret»[6] donné, pouvaient être non résolues par des sujets de première année.

De plus, il pouvait aussi arriver qu'un sujet, tel Pat, n'arrive pas à résoudre une situation présentée sous forme symbolique (□ + 2 = 7), et parvienne cependant à résoudre la situation correspondante, présentée dans un contexte concret.

4.3 A l'issue d'une première expérimentation de nature exploratoire: des pistes à suivre ...

Nous avons vu que des enfants éprouvant des difficultés reconnues par les enseignantes au niveau des opérations arithmétiques semblaient se situer au seuil du stade opératoire. Ce dernier stade étant défini comme la capacité à opérer sur des opérateurs (cf. 4.2.2.1.c). Ces mêmes sujets ne sont pas parvenus à résoudre certaines situations d'addition ou de soustraction (présentées sous forme d'opérateurs) dans un contexte concret, et en l'absence de symbolisme.

D'autre part nous avons aussi observé qu'il était possible qu'un sujet (Pat) résolve une situation d'addition dans un contexte concret, et non

---

6 Par concret, j'entends le contexte d'une situation présentée sans faire appel au symbolisme, avec des objets réels que le sujet peut manipuler.

l'équation correspondante (cf. 4.2.2.2.c). Cette dernière possibilité posait le problème de l'interprétation que font les enfants des symboles utilisés habituellement en arithmétique (+, -, =, □ , chiffres).

CHAPITRE II

1. Introduction:

Nous avons noté la difficulté de Pat à résoudre une équation. Cette difficulté se retrouverait-elle chez d'autres sujets? Cette dernière préoccupation m'amena à d'autres questions: qu'est-ce qu'un symbole mathématique, et quelle (s) interprétation (s) font les enfants de première année des symboles utilisés pour écrire des équations (ou des égalités) en arithmétique?

Nous avons aussi observé que, même dans un contexte concret, certaines situations n'étaient pas résolues par des sujets rencontrés en entrevue. Cette dernière observation m'amena à me demander s'il y avait des situations plus difficiles à résoudre que d'autres. Par exemple, les situations de soustraction seraient-elles plus difficiles que les situations d'addition?

Dans ce chapitre, il sera d'abord question de l'interprétation des symboles arithmétiques par des enfants: je ferai une brève revue de littérature sur le sujet et décrirai de nouvelles observations faites à l'aide d'entrevues individuelles auprès de quelques enfants, concernant leur(s) interprétation(s) de symboles arithmétiques.

Je ferai part également d'une rencontre avec un sujet de première année, Car. Cette mini-expérimentation m'amena à formuler une interprétation de ses réactions devant les problèmes présentés.

Cette étape m'amènera par la suite à exécuter une série d'exprimentations plus systématiques (toujours en entrevue individuelle) relativement à des situations d'addition ou de soustraction; celles-ci feront l'objet du chapitre III.

2. Interprétation des symboles arithmétiques

2.1 Qu'est-ce qu'un symbole arithmétique?

Chacun des symboles 3, 2, 5, +, -, = représente, au plan arithmétique, un signe[7] accepté par convention, tout comme les signes utilisés pour le langage. Ces signes arithmétiques constituent un système de signes collectifs. Les signes numériques (1, 2, 3, ...), représentant les nombres naturels, et le signe égal (=), apparaissent dans des propositions numériques du type $3 + 2 = 5$ ou des formes propositionnelles du type $3 + \square = 5$, appelée équation.

Le signe $\square$ désigne, dans plusieurs manuels scolaires, un nombre inconnu et qu'il faut chercher. On le retrouve à l'intérieur de formes propositionnelles du type: $2 + 3 = \square$, $\square = 5 + 4$, ... ou d'autres assemblages du même type. Pour trouver la solution de telles formes propositionnelles, il s'agit de trouver un nombre pour lequel la proposition ainsi formée s'avère vraie (Christian, 1968). En logique, on retrouve des propositions vraies ou fausses. Ainsi, $2 + 3 = 4$ est une proposition fausse, et 4 ne vérifie pas la forme propositionnelle $2 + 3 = \square$, appelée équation; $2 + 3 = 5$ est une proposition vraie, et 5 vérifie $2 + 3 = \square$: 5 est donc une solution à $2 + 3 = \square$.

---

[7] Le signe a pour fonction «de représenter ou de signifier quelque chose par autre chose», les symboles mathématiques étant des signes acceptés par convention (Legendre-Bergeron, M.F., 1980: 204)

Le signe = désigne une relation dite d'égalité. Lorsqu'on écrit deux symboles, de part et d'autre de ce signe, cela signifie que ces deux symboles représentent le même élément (Bourbaki, 1964). Ainsi, si j'écris 2 + 3 = 4 + 1, cela signifie que 2 + 3 et 4 + 1 désignent le même objet, soit 5.

Quant aux signes 0, 1, 2, 3,... chacun d'eux désigne une abstraction. Par exemple, le signe 3 représente une classe d'équivalence (cf. page 10) appelée nombre cardinal. Cette classe est déterminée par tous les ensembles équipotents [8] à un ensemble contenant trois éléments (Suppes, 1967).

D'autre part, nous avons vu (paragraphe 3.1, p. 7) comment les signes + et - sont reliés à des opérations effectuées sur des nombres cardinaux.

2.2 Conception des enfants face au symbolisme, résultats d'une recherche (Behr et al, 1976):

Cette recherche avait pour but de déterminer, entre autres choses, la conception que se font les enfants des équations (du type a + b = □ et □ = a + b) et des symboles utilisés dans ces équations (+, =, a + b) a et b étant des petits nombres. Dans leur rapport, les auteurs font état de certaines observations recueillies au cours d'entrevues individuelles non structurées auprès d'enfants de première et de deuxième année. Ces mêmes auteurs ne précisent pas combien d'enfants, au total, ont ainsi été interviewés.

---

[8] Des ensembles équipotents sont des ensembles entre lesquels on peut établir une correspondance biunivoque. Une telle correspondance est constituée par un appariement un à un de chacun des éléments des ensembles.

Tous les enfants cités (3 de première année, 2 de deuxième année) ont résolu les équations du type a + b = □ (2 + 4 = □ , 1 + 3 = □, ...). Cependant, 2 des 3 enfants de première année sont incapables de dire ce que les symboles +, =, 2 + 4 signifient comme tels ou dans le contexte d'une égalité ou d'une équation. Un (1) enfant de première année et les deux (2) enfants de deuxième année considèrent 2 + 4 comme une addition à exécuter et non une autre façon d'écrire 6; le signe = est considéré comme le signal indiquant que quelque chose doit être fait, par exemple, une addition représentée par le signe + (par exemple, dans 3 + 4 = 7).

Devant des équations du type □ = a + b, cinq (5) des six (6) enfants cités (4 de première année et 2 de deuxième) réagissent selon une des deux façons suivantes: soit qu'ils changent □ = 3 + 4 en disant que c'est écrit «à l'envers» et réécrivent 4 + 3 = □ ou changent le = pour le + (□ = 3 + 4 devient □ + 3 = 4). Un seul fait exception (enfant de deuxième année): Ainsi M, devant □ = 3 + 5, écrit 8 = 3 + 5 et lit «8 égale 3 plus 5», alors que D écrit 8 = 3 + 5, mais lit «5 plus 3 égale 8». M est le seul à accepter un tel type d'équation (telle □ = 2 + 5), alors que les autres comme D, ont tendance à modifier ce type d'équation (exécuter à l'envers ou changer le = pour le +).

2.3 Perception des enfants face au symbolisme, observations personnelles:

Cette dernière lecture (Behr et al, 1976) m'amena à rencontrer des enfants, en entrevue individuelle, pour observer leurs réactions devant des équations du type a = b - □ et a = □ - b.

Je présenterai, ici, les réactions de quatre enfants de première année rencontrés au mois de juin (donc, à la fin de leur première année de scolarité)[9].

2.3.1 Réactions devant l'équation du type a = b - □

Sur les quatre enfants rencontrés (cf. annexe 5), deux résolvent l'équation, et deux font deux erreurs. La première consiste à transformer la forme a = b - □ en a + b = □, la seconde à lire à l'envers (a = b - □ est lue □ - b = a). Par exemple, avec 3 = 7 - □, Pat fait trois, puis sept avec ses doigts pour trouver dix; 3 = 7 - □ devient 3 + 7 = □. Dan (avec 3 = 7 - □) dit «huit», prend ses doigts, en enlève sept en comptant; il se rend compte que ça ne donne pas trois. Il essaie neuf, puis finalement dix: 3 = 7 - □ devient □ - 7 = 3.

On observe donc ici une réaction semblable à celle de l'étude de Behr et al face à la forme □ = a + b, où cinq des six enfants réagissent de la même façon: soit en disant que c'est écrit à l'envers, la «bonne» forme étant b + a = □, soit en transformant □ = a + b en □ + a = b.

2.3.2 Réactions devant l'équation du type a = □ - b

Les quatre enfants ne résolvent pas ce type d'équation. Trois des quatre résolvent 3 = □ - 7 en partant de 7, faisant une lecture de droite à gauche (7 - □ = 3).

---

[9] Ces quatre (4) enfants de première année avaient été sélectionnés par l'enseignante comme appartenant à ceux éprouvant des difficultés avec les opérations: Dav, Pat et Lou ont déjà été cités dans cette recherche (cf. p. 14: b. Réactions des sujets). Dan est un nouveau sujet.

2.3.3 Réactions de 3 sujets face à l'égalité et sa symbolisation

Dav, Pat et Lou ne manifestent pas de difficulté à affirmer qu'une collection de douze (sous) «est la même chose» (signifie «est égale à...» dans le langage des enfants) que deux collections équivalentes de sous (9 et 3, 8 et 4, ...). (cf. annexe 6).

Cependant, quand je leur demande: «Comment tu ferais pour écrire à quelqu'un qu'il y en a pareil (ou qu'il y a la même chose de sous, qu'il y en a égal)?» Voici les réactions des trois sujets.

i) Lou écrit: «douze égal douze»

ii) Dav, qui avait placé les sous (collection de 12, puis de 9 et 3 sous) selon une configuration (les 12 sous sous forme de la lettre L) écrit en réponse à ma question: E + L + L reproduisant la configuration qu'il a faite. Quand je lui demande: «Et avec des chiffres?», il écrit: 12 + 9 = 3 ... et dit: «... ou encore, je pourrais écrire l'inverse 9 + 12 = 3, ou écrire ça autrement 3 + 9 = 12».

iii) Pat, quant à lui, écrit 12 12 (avec un espace entre les deux symboles 12), sans doute pour montrer qu'il y a la même chose dans les deux paquets (12 et 9 avec 3). Voici la suite de l'entrevue (S désigne le sujet, soit Pat):

E: Comment tu ferais pour écrire à quelqu'un qu'il y en a pareil ici (12) et là (9 et 3)?

S : ... (ne répond pas)

E: Qu'est-ce que tu penses de ça? (j'écris 12 = 12)

S : (efface le signe =) Non, c'est la même chose!

On remarque, dans les trois cas cités, une difficulté à symboliser l'égalité numérique d'ensembles (12, 9 et 3) considérés par ailleurs égaux en nombre auparavant.

Pour Dav, les signes + et = ne semblent signifier rien d'autre qu'une séparation entre des chiffres, sans référence à une action concrète d'ajouter ou de mettre ensemble pour + et de mettre en correspondance pour =.

Pat efface le signe = entre les symboles 12, parce que «c'est la même chose!». Quant à Lou, il semble établir un lien entre le concept d'égalité et un signe écrit, le mot «égal», pour le représenter. Je ne sais rien cependant du lien que ce dernier aurait établi avec le signe = utilisé en arithmétique.

2.4 Bilan sur l'interprétation des symboles arithmétiques:

L'étude de Behr et al (1976), de même que mes observations personnelles tendent à montrer:

- que certains enfants, surtout ceux de première année (Behr et al), ne peuvent donner la signification des signes +, =, 2 + 4;
- le signe = est considéré comme le signal que quelque chose doit être fait: la réponse doit venir après le signe =;
- il y a une forte tendance à considérer le signe = comme acceptable seulement dans les équations où un signe opératoire (+, -) le précède; ainsi, $\square = a + b$ devient $a + b = \square$, $a = b - \square$ devient $a + b = \square$ ou $\square - b = a$; $a = \square - b$ devient $b - \square = a$. C'est ainsi que les 5 enfants de l'étude de Behr et al résolvent tous l'équation du type $a + b = \square$. La forme symbolique $a = a$ est inacceptable.[10]

3. Situations d'addition et de soustraction présentées dans un contexte concret:

Vers la fin de cette même année scolaire (juin), j'eus l'occasion de rencontrer un enfant de première année. Car a de la difficulté avec des équations du type $a + \square = c$, $\square + a = b$,... Son professeur se demande que faire pour qu'il soit capable de résoudre ces équations.

---

10 Pat affirme que deux collections de douze sous placées devant lui sont «égales» mais refuse ensuite la forme symbolique 12 = 12. Il efface le signe = et dit: «Non, c'est la même chose!»

Je suis alors amené à rencontrer Car. Je connaissais les comportements typiques des enfants de première année dans des équations données hors contexte (cf. 2.2 et 2.3 du chap. II). Je voulais à ce moment vérifier le comportement de l'enfant face à des problèmes du type a - □ = c, □ + a = b, a - b = □, donnés cette fois dans le contexte d'une situation avec l'appui d'objets concrets, et avec manipulation effective de ces objets. Je faisais alors l'hypothèse que Car pourrait résoudre ces problèmes dans un contexte concret.

3.1 Le problème de type a - □ = c et les réactions de Car:

Le problème donné à l'enfant est le suivant. Je pose des noix (a =6) sur une table et dis qu'il y a un écureuil qui, pendant la nuit, vient chercher des noix sans que le sujet voie combien. Après avoir enlevé un certain nombre de noix, inconnu du sujet (□), je montre le nombre de noix qu'il reste, soit c= 4. Je demande à Car combien l'écureuil est venu chercher de noix. Les réactions du sujet pendant les quelques essais où je fais varier a, □ et c sont les suivantes:

- le sujet donne des réponses (incorrectes) qui sont toujours un nombre inférieur au nombre de noix placées au départ sur la table;

- Car, en réponse à une question (je lui demande comment il fait pour trouver combien de noix ont été enlevées), dit qu'il «devine». [11]

3.2 Le problème de type □ + a = b:

Je dispose de représentations de poissons découpées dans du carton, et d'un aquarium représenté par une boîte de carton. Je dis au sujet qu'il y a des poissons dans l'aquarium en les déposant alors que Car a le dos tourné. Je dépose alors un nombre de poissons inconnu (□) par le sujet. Puis, à la vue de celui-ci, je dépose ensuite a poissons (a = 2). Je montre ensuite le nombre de poissons (b = 5), qu'il y a dans l'aquarium, en demandant au sujet: «Combien il y avait de poissons au début, dans l'aquarium?» Car répond d'abord «cinq», puis se reprend spontanément, et dit «deux». On peut même se demander si Car a bien compris, à ce moment, la question que je lui ai posée. Ce même problème sera d'ailleurs repris avec d'autres sujets au chapitre trois.

3.3 Le problème de type a - b = □

Je place à la vue du sujet des noix (a = 5). Puis je dis qu'un écureuil, pendant la nuit, vient en chercher trois (b = 3), laissant les noix à la vue de l'enfant.

---

11 Une semaine plus tard, le même problème est repris avec le même sujet: la réaction de Car est semblable: le sujet semble «deviner». Ainsi, il répond «trois», alors que j'enlève «deux». Car trouve cependant «un» alors que j'enlève 1 noix, après avoir compté cette fois, les noix qui restent.

Enfin, je demande au sujet: «Combien il reste de noix après que l'écureuil est venu en chercher trois?» Le sujet trouve facilement les solutions au problème de ce type.

3.4 Interprétation des données d'observation

Car n'avait pas réussi à résoudre les problèmes de type a - □ = c et □ + a = b. Il avait cependant résolu a - b = □. Comment interpréter ces réactions?

Au moment où je recueillais ces données, je croyais pouvoir les interpréter à la lumière des résultats obtenus par Piaget concernant deux problèmes présentés aux enfants: le problème de «composition additive des classes», (Piaget, 1967; p. 208) et celui de «composition additive des nombres», (Piaget, 1967; p. 238). Or, les problèmes du type a - □ = c (où le sujet doit trouver le nombre de noix enlevées aux a noix pour obtenir c noix) et celui du type □ + a = b (où le sujet doit trouver les □ noix qu'il y avait au départ, compte tenu qu'on a ajouté a noix et qu'il y a maintenant b noix en tout) sont différents des problèmes posés par Piaget. Il me fallait donc chercher ailleurs des explications autour de l'idée de fonction symbolique, un thème majeur de la pensée de Piaget (Vergnaud, 1981).

Il semble que Car éprouve de la difficulté à évoquer, en l'absence des objets réels, la propriété pertinente pour l'action. C'est le cas pour a - □ = c où Car ne peut procéder intérieurement pour trouver □, en l'absence de

la totalité a. Même lorsque les noix sont toutes présentes, (b étant visible et contenant les a et □ noix), il semble que Car ne puisse évoquer la «propriété pertinente pour l'action», soit faire l'inverse de ce qui a été fait par l'expérimentateur (ici, enlever les a noix aux b noix). Dans ces deux cas, c'est comme si Car ne pouvait simuler d'une façon symbolique le réel(l'histoire de l'écureuil), soit en évoquant visuellement l'histoire, soit en opérant intérieurement ou en se représentant les transformations nécessaires pour résoudre le problème (Vergnaud, 1981). Pour le cas a - b = □ , le sujet peut évoquer l'histoire et opérer sur les noix présentes devant lui.

4. En résumé:

Le chapitre II a présenté encore une fois des observations de nature exploratoire. Celles-ci concernaient 1) les difficultés d'interprétation des enfants rencontrés face aux symboles arithmétiques usuels (+, =, 2 + 4, ...); 2) le comportement typique des enfants avec le signe = et les équations du type a = b - □, □ = a + b, a = □ - b, et finalement 3) la difficulté de Car avec des situations d'addition et de soustraction présentées dans un contexte concret. Cette dernière observation donna lieu à un début d'interprétation (cf. 3.4).

Afin d'arriver à une interprétation plus juste des réactions de Car, par exemple pour le problème de type □ + a = b, il me fallait alors étendre l'expérimentation à d'autres sujets, et l'effectuer systématiquement auprès de ces derniers. Je voulais ainsi observer les réactions d'enfants rencontrés en entrevue individuelle, relativement à des situations d'addition et de soustraction présentées d'abord dans un contexte concret (problème), puis dans un contexte symbolique (équation). Je voulais aussi savoir si ces sujets pouvaient établir un

lien entre la situation (d'addition ou de soustraction) concrète et l'équation correspondante. Le chapitre III rapportera donc cette série d'expérimentations.

CHAPITRE III

1. Introduction:

Les situations présentées à Car (écureuil, poisson) et la tentative d'interprétation qui suivit soulevèrent une série de questions plus précises et inspirèrent la construction d'un modèle d'expérimentation permettant de cueillir des données relatives à ces questions.

Ce chapitre décrira trois expérimentations effectuées l'une après l'autre, et exposera les données recueillies à ce moment et l'interprétation qui en a été faite. Ces expérimentations furent effectuées à l'aide d'entrevues individuelles et avaient pour objet de répondre aux questions suivantes:

- Comment les enfants éprouvant des difficultés avec les équations résolvent-ils des situations d'addition ou de soustraction présentées dans un contexte concret?

- Quel lien ces enfants établissent-ils entre le problème (avec contexte concret) et son équation correspondante?

- Y a-t-il des problèmes plus difficiles que d'autres pour ces sujets? Si oui, quels sont-ils, et comment interpréter cela?

A l'issue de ce chapitre, les résultats de ces expérimentations conduiront à l'énoncé d'hypothèses à vérifier auprès d'un échantillon plus large d'enfants. L'expérimentation auprès de cet échantillon fera l'objet du quatrième chapitre.

2. Première expérimentation:

Cette expérimentation fut réalisée le 21 décembre 1982, soit six mois environ après avoir rencontré Car. Etant donné que les enfants de première année n'avaient pas suffisamment d'acquisitions arithmétiques (symbolisme, addition, soustraction, ...) à ce moment de l'année scolaire, j'ai décidé de rencontrer quatre enfants de deuxième année (Syl, Isa, Fra et Mel). Ces sujets étaient identifiés par l'enseignante comme «éprouvant des difficultés avec les équations». L'entrevue a été enregistrée, ce qui facilitait la cueillette de données. [12]

Chaque sujet était rencontré individuellement; afin de rendre motivante l'entrevue, j'avais imaginé deux histoires (histoire sur l'écureuil et histoire sur les poissons). M'inspirant des histoires présentées à Car (cf. chap II, paragraphe 3), je composai six situations différentes. [13] Ces situations étaient présentées au sujet rencontré individuellement. Après chaque situation présentée dans son contexte, le sujet répondait aux questions posées par l'expérimentateur: il y avait toujours une ou des questions posées au sujet pour connaître les procédés qu'il venait d'utiliser pour trouver sa «réponse».

---

12 Cependant, une erreur dans la manipulation de l'enregistreuse m'a fait perdre toutes les données concernant Mel et la plupart des données concernant S.

13 Ces situations sont décrites à l'annexe 7 et sont sur le modèle des situations déjà présentées lors de l'expérimentation décrite au chapitre I (paragraphe 4.2.2.2). L'annexe 8 est une représentation de l'expérimentation 1.

2.1 Procédures utilisées:

Ces six situations étaient présentées l'une à la suite de l'autre au sujet rencontré en entrevue individuelle. Après que chaque situation (par exemple a - x = b) était présentée dans son contexte, je posais au sujet:

- une question pour connaître sa «réponse»;
- une ou des questions pour connaître le ou les procédés que le sujet avait utilisé pour trouver sa «réponse»;

Puis, j'écrivais l'équation correspondante (pour a - x = b, j'écrivais 12 - □ = 7, cette dernière équation correspondant à la situation concrète présentée). Les questions que je posais alors au sujet (cf. annexe 7) à ce moment-là avaient pour but de vérifier si le sujet établissait un lien entre la situation (d'addition ou de soustraction) présentée dans un contexte concret, et la forme symbolique correspondante écrite sous forme d'équation; je pouvais donc vérifier à ce moment si le sujet pouvait résoudre ou non la situation concrète et l'équation correspondante, puis, s'il établissait ou non un lien entre la situation concrète et la forme symbolique correspondante.

Comme nous l'avons vu (paragraphe 2), les sujets rencontrés étaient des sujets de deuxième année; nous présenterons les cas de Fra, Syl et Isa. Ils étaient âgés respectivement de 7;7, 7;6 et 8;7. [14] Je reproduis ici une séquence d'entrevue avec Fra pour aider le lecteur à comprendre comment

---

14 Isa était un sujet plus âgé parce qu'il avait fait une classe d'adaptation scolaire en première année.

cela se passait et pour l'aider à mieux comprendre les résultats obtenus; je reproduis ici l'entrevue pour la forme a - b = x:

J'avais placé 14 poissons dans l'aquarium; Fra les avait comptés. Puis le «chat» en avait mangé trois: je venais de les laisser près de l'aquarium, à la vue de Fra, les poissons restants étant dans la boîte fermée (l'aquarium).

E : ... Combien il en reste dans l'aquarium?

Fra : Il y en avait quatorze ...

E : (Fra veut alors regarder dans l'aquarium)
... regarde pas parce que ... (en riant) tu en avais quatorze, mais là on a mangé ceux-là, il faut que tu saches combien il en reste (dans l'aquarium).

Fra : Euh ... douze

E : Douze

Fra : Oui, douze

E : Comment tu fais pour trouver douze?

Fra : Parce que ...

E : Tu es sûr que c'est douze?

Fra : Euh ... non!

E : Peux-tu vérifier?

Fra : ... Non. Ah non! c'est neuf!

(E montre alors les poissons de l'aquarium, Fra compte alors les onze poissons). Puis l'entrevue continue ...

E : ... Supposons que j'écrirais ça (E écrit 14 - 3 = □)

Comment tu ferais ça toi?

Fra : Euh ... je mettrais ... je mettrais ... onze!

E : Comment tu as fait? tu as fait vite

Fra : Parce que ... parce que il y en a onze dans ça (dans l'aquarium).

2.2 Les résultats obtenus

Je reproduis les résultats obtenus par Fra et Isa et des résultats partiels concernant Syl. Les tableaux suivants illustrent ceux-ci. On indique par un X dans la case appropriée si le sujet a résolu ou non (R, nR) le problème (situation concrète) et l'équation; de plus on note si le sujet a établi un lien entre la situation concrète et sa forme symbolique écrite sous forme d'équation.

Tableau 4a: Fra

#	FORMES	PROBLEMES		EQUATIONS		LIEN PROBLÈME-EQUATION
		R	nR	R	nR	
1	a - x = b		X	X		non
2	a + x = b	X		X		non
3	x - a = b	X			X	non
4	a + b = x	X			X	non
5	x + a = b	X		X		semble établir un lien
6	a - b = x		X	X		semble établir un lien

Note: Fra réussit les équations x - a = b et a + b = x après des interrogations de E.

Tableau 4b: Isa

#	FORMES	PROBLÈMES		EQUATIONS		LIEN PROBLÈME-EQUATION
		R	nR	R	nR	
1	a - x = b	X			X	non
2	a + x = b	X		X		semble établir un lien
3	x - a = b	X		X		semble établir un lien
4	a + b = x	X		X		semble établir un lien
5	x + a = b	X		X		semble établir un lien
6	a - b = x		X		X	non

Tableau 4c: Syl

#	FORMES	PROBLÈMES		EQUATIONS		LIEN PROBLÈME-EQUATION
		R	nR	R	nR	
4	a + b = x	X		X		non
5	x + a = b	X			X	non
6	a - b = x		X	X		non

La lecture de ces tableaux montre que les problèmes a - x = b et a - b = x sont plus difficilement résolus que les autres problèmes. En effet, a - b = x n'est résolu par aucun des trois sujets. Ces deux problèmes ont ceci de particulier que la totalité des glands, soit a, n'apparaît plus à la fin devant les yeux du sujet; il doit donc la conserver mentalement pour résoudre le problème. Dans ces situations non réussies, la réaction était de donner une réponse approximative. Les problèmes # 2 à # 5 sont tous réussis.

De plus, il semble exister une cloison assez étanche entre le problème et sa représentation sous forme d'équation. J'ai aussi observé que même le support concret (poissons découpés ou glands) utilisé pour résoudre les équations était souvent utilisé sans lien avec le problème, uniquement pour trouver une réponse à l'équation: ce fut souvent le cas pour Fra et Syl. Nous observons de plus que, souvent, un sujet peut réussir le problème et non l'équation, ou l'inverse: ce qui montre encore une fois le décalage existant entre le problème et l'équation.

Ces observations et interprétations suscitèrent des questions qui donnèrent lieu à une deuxième expérimentation. Cette expérimentation sera maintenant décrite au paragraphe suivant.

3. Deuxième expérimentation[15]:

La première expérimentation avec Fra, Isa et Syl m'a amené à décrire leurs réactions face aux problèmes et aux équations correspondantes, à discriminer, parmi les problèmes, deux classes de problèmes, et enfin à mettre en évidence une cloison apparemment assez étanche entre un problème et sa notation mathématique sous forme d'équation.

Dans cette section, je décrirai le déroulement d'une deuxième expérimentation ayant pour but d'explorer plus en profondeur un certain nombre de questions. Ce ne seront ni des hypothèses bien établies, ni des questions fermées, mais des questions ouvertes sur un phénomène à connaître.

---

15 Cette deuxième expérimentation s'est déroulée le 26 janvier 1983, soit environ 1 mois plus tard.

Je définirai d'abord deux classes de problèmes à partir de la cueillette de données de la première expérimentation. Puis, j'énoncerai trois catégories de questions, Pour chacune de ces catégories, je décrirai l'expérimentation puis, quelques éléments de réponses concernant cette catégorie de questions. Les données de cette deuxième expérimentation allaient conduire à l'énoncé et à la vérification d'une hypothèse: ce dernier point fera l'objet de la section 4 du présent chapitre.

3.1 Deux classes de problèmes:

Nous avons observé, suite à une première expérimentation avec Fra Syl et Isa, agés respectivement de 7;7, 7;6 et 8;7 que les problèmes de la forme a - x = b et a - b = x étaient plus difficilement résolus que d'autres formes de problèmes, comme a + b = x, a + x = b, x - a = b et x + a = b. De fait, Fra et Isa ont facilement résolu ces derniers alors que les trois enfants n'ont pas réussi à résoudre le problème de la forme a - b = x présenté par l'expérimentateur. Quant aux problèmes de forme a - x = b, de Isa et Fra, seule Isa a réussi.

Pour la discussion, je distinguerai deux classes de problèmes. Les problèmes de la forme a + b = x, a + x = b, x - a = b et x + a = b font partie de la classe que nous nommerons dorénavant de type concret. Cette classe de problèmes est caractérisée par le fait que les objets sont constamment à la vue du sujet, de sorte que ce dernier est alors en mesure d'agir sur ceux-ci.

L'autre classe de problèmes sera nommée de type concret limité; les problèmes de la forme a - b = x et a - x = b appartiendront à cette classe. Pour ces deux problèmes, la totalité (a), après avoir été dénombrée par le sujet, est retirée de sa vue lorsque l'expérimentateur enlève des objets. Dans le cas de la forme a - x = b, le sujet ne voit que la partie b restante après que l'expérimentateur a enlevé de la totalité (a), sans que le sujet voie, un nombre x d'objets. Et c'est précisément ce nombre d'objets enlevés que le sujet doit déterminer. Inversement, dans le cas de la forme a - b = x, le sujet voit la partie b enlevée; et c'est maintenant le nombre x d'objets restants, que le sujet ne voit pas, qu'il doit déterminer. Ainsi, contrairement aux problèmes de type concret, dans le cas des problèmes de type concret limité, le sujet n'est plus en contact direct, concret, avec la totalité mais seulement avec son souvenir. L'annexe 9 résume ce qui précède.

3.2 Première catégorie de questions:

Les sujets dont il vient d'être question (Syl, Fra et Isa) étaient qualifiés par leur enseignante titulaire comme étant des élèves éprouvant des difficultés en mathématique, notamment avec les équations. Ces sujets étaient en deuxième année et leur âge, rappelons-le, variait de 7;6 à 8;7 ans. Je me suis demandé ce qu'il adviendrait chez un sujet plus jeune de première année, qualifié par l'enseignante titulaire d'élève se situant dans la moyenne en mathématique, face à un problème de type concret ou concret limité? Ce sujet éprouverait-il les mêmes difficultés que Fra et Isa avec les problèmes de type concret limité? Et parmi les problèmes de type concret limité, éprouverait-il plus de difficulté avec un problème de la forme a - b = x qu'avec un autre de la forme a - x = b, comme ce fut le cas pour Isa?

J'ai donc sélectionné un sujet de première année: Ise, âgé de 6;8 ans, considéré en mathématique comme situé dans la moyenne des élèves de sa classe (selon l'enseignante titulaire). L'expérimentation se déroula le 26 janvier 1983.

3.2.1 Description de l'expérimentation:

J'ai présenté à Ise un problème de type concret, soit a + x = b, et les deux problèmes de type concret limité, soit a - x = b et a - b = x. Pour chacun des problèmes, je laisse le temps au sujet d'expliquer comment il a procédé et lui pose à l'occasion quelques questions. Pour a + x = b et a - x = b, a glands sont au départ présentés.

J'ajoute ou enlève selon le cas, x glands, en me faisant passer pour un écureuil qui apporte (a + x = b) ou vient chercher (a - x = b) des glands alors que le sujet a le dos tourné. Le sujet voit les b glands qui résultent de la venue de l'écureuil, et il doit trouver ce que l'écureuil a ajouté ou enlevé, soit x.

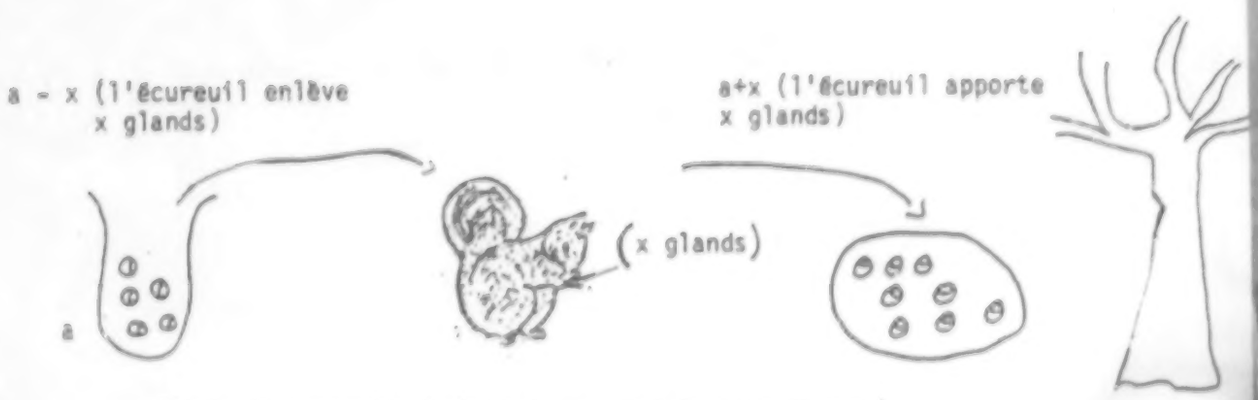


Figure 1: représentation de a - x = b ou a + x = b.

Pour a - b = x, je présente un aquarium avec des poissons (découpés dans du carton et placés dans une boîte qui tient lieu d'aquarium). Les a poissons sont dénombrés par le sujet. Puis, l'expérimentateur raconte qu'un chat vient manger des poissons pendant la nuit. Il enlève alors b poissons, qu'il laisse à la vue du sujet. Celui-ci doit trouver le nombre de poissons restant dans l'aquarium (x).

Figure 2: représentation de a - b = x.

3.2.2 Comportement d'Ise :

1) Problème de type concret (a + x = b)

Ici, alors qu'Ise a le dos tourné, j'ajoute 3 glands aux 8 glands que le sujet avait dénombrés au départ.

L'opération terminée, le sujet se retourne et constate le résultat de l'intervention de l'«écureuil»; je lui demande combien de glands ont été ajoutés.

Ise : Il y en avait huit, ...

E : Oui ... tu peux compter, prendre dans tes mains, faire ce que tu veux.

Ise : (silence) ... trois

E : Comment tu as fait pour trouver trois? ... parce que je t'ai vu, avec tes yeux, mais j'aimerais ça savoir comment tu as fait.

En effet, j'observe alors que le sujet compte les glands avec ses yeux sans les toucher ou les manipuler.

Ise : Bien ... j'ai euh ... j'ai regardé, en premier j'ai ... j'ai découvert qu'il y en avait trois.

Le sujet ne donne pas d'explication claire sur le procédé qu'il a utilisé, il ne peut que dire la réponse qu'il a trouvée, soit trois. Je questionne encore le sujet dans le but de savoir comment il a procédé.

E : Tu as dit huit au début. Peux-tu me le faire tout haut un petit peu ce qui s'est passé dans ta tête? Tu as regardé, peux-tu me le dire tout haut? J'aimerais ça savoir comment tu as fait.

Ise : (silence)

E : Tu m'as dit trois, hein, tu m'as dit qu'il (l'écureuil) en avait rajouté trois, puis euh ... je voudrais voir comment tu as fait.

Ise : Bien il y en av... là il y en avait huit, ...

E : Oui

Ise : Puis là il y en a trois

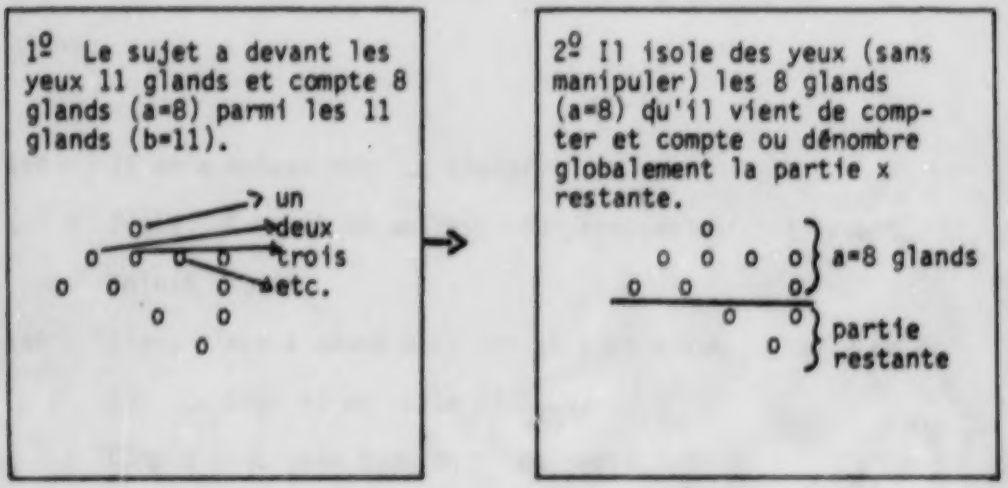
E : Montre-moi donc voir comment tu fais ça?

Ise : Bien ... huit, puis là, il y en a trois, puis là, il y en a une, deux, trois, ..., huit.

Le sujet éprouve des difficulté à expliquer le procédé qu'il a utilisé. Je tenterai quand même de dégager les étapes de son raisonnement face à ce problème.

Ayant devant les yeux la totalité b = 11 glands après que j'ai ajouté des glands, le sujet compte d'abord la

quantité de départ (a = 8 glands) qu'il a gardée en mémoire. Il isole ainsi deux parties (a et x), puis, il compte systématiquement ou dénombre globalement (sans comptage systématique, si le nombre est petit) le nombre des glands ajoutés, soit x. Voici comment peut être schématisé ce procédé:



Compte tenu de la 2è étape représentée ci-dessus, nous pouvons tout au plus affirmer que le sujet résout cette forme de problème dans le cas où x est dénombrable globalement, sans comptage systématique (cas où x = 4, par exemple). Qu'en est-il cependant pour le cas où la valeur de x exige le comptage systématique (cas où x = 9, par exemple)? Le sujet aurait-il compté systématiquement la partie x, ou l'aurait-il évaluée approximativement? Cette expérimentation ne permet pas de répondre à cette question.

ii) Problème de type concret limité (a - x = b)

Je pose ce problème en présentant 12 glands au sujet. Celui-ci les dénombre. Puis, je (un écureuil) viens enlever x = 5 glands pendant que le sujet a le dos tourné. Je demande par la suite, en montrant les b glands restants (b= 7) au sujet, qui s'est tourné, combien l'écureuil a enlevé de glands.

Ise : Il en a enlevé euh ... trois?

E : Trois. Comment tu as fait pour trouver qu'il en avait enlevé trois?

Ise : Bien, c'est à cause que, ici il y en a euh ... il y en a euh ... bien il en reste sept ...

E : Compte donc voir combien il en reste.

Ise : Il y en a une, deux, ..., six
(Isab fait une erreur de comptage)

E : Compte donc voir, je suis pas sûr que t'as bien, t'as bien compté, ... recompte donc voir

Ise : (compte) Il y en a sept.

E : Il y en a sept, toi, tu me disais qu'il est venu en chercher ... trois.

Ise : Trois

E : Comment tu as fait pour trouver qu'il est venu en chercher trois?

Ise : Parce qu'il y en avait douze, puis là il y en a sept.

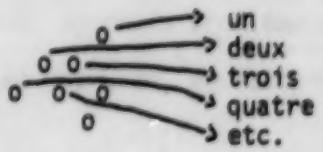
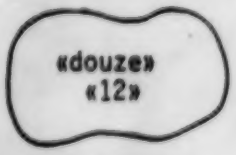
E : Alors, toi, tu penses qu'il est venu en chercher trois. Comment tu as pensé ça qu'il est venu en chercher trois, qu'est-ce qui t'a fait dire qu'il est venu en chercher trois? Qu'est-ce qui s'est passé dans ta tête? Peux-tu le ... j'aimerais ça l'entendre.

Ise : ...

E : Tu t'es dit peut-être trois, c'est ça?

Ise : Oui

Voici, représenté schématiquement, le procédé que semble avoir utilisé le sujet.

1°) le sujet a devant les yeux les b glands restants (b=7) 	2°) il compte les glands restants 
3°) le sujet a gardé en mémoire le nombre de glands du départ (a = 12 glands) 	4°) il trouve 3 pour la valeur de x = nombre de glands enlevés à douze ? (le procédé inconnu)

Le passage de l'étape 3 à l'étape 4 est obscur. Le sujet a-t-il procédé par approximation, estimant que douze est plus grand que sept d'environ trois? Ou a-t-il utilisé un procédé différent? Quoiqu'il en soit, Ise n'a pas résolu cette forme de problème, quel que soit le moyen utilisé pour trouver x = 3. Sa réaction est cependant caractéristique de sujets déjà rencontrés. Comparons le cas de Ise avec ceux de Fra (chap III, para. 2) et de Car (sujet de première année, rencontré lors d'une pré-expérimentation), afin de dégager cette réaction caractéristique.

a) Le cas de Car (chap II, para. 3.1)

L'expérimentateur donne le problème de la forme a - x = b, à quelques reprises, en faisant varier à chaque fois x.

Le sujet donne alors des réponses incorrectes qui sont toujours un nombre inférieur au nombre de glands au départ (a). En réponse à une question qui lui demande comment il fait pour trouver le nombre de glands enlevés, Car répond: «je devine».

b) Le cas de Fra (chap III, para. 2)

La situation présentée est la même qu'avec Ise, sauf qu'ici, a=13, b=8. Voici un fragment de l'entrevue.

E : ... Combien tu penses que j'en ai pris (de glands)?

Il reste huit glands sur la table après que l'expérimentateur a enlevé cinq glands.

Fra : ... euh ... euh ...

E : Embêté?

Fra : Oui ... je pense que tu en as emmené ... tr ... ois

E : Tu penses que j'en ai amené trois; comment tu as fait pour dire que j'en ai emmené trois?

Fra : Bien, j'ai regardé!

L'expérimentateur, que cette réponse vague du sujet n'avait pas éclairé, décide alors de donner le même problème au sujet, en faisant varier b; cette fois b = 9. L'expérimentateur a alors enlevé x = 4 glands.

Fra : Tu en as enlevé gros! ... six?

E : Comment tu as fait pour dire six? Parce que j'en ai enlevé gros tu penses?

Fra : Oui

Fra et Car, contrairement à Ise, n'ont pas compté les b glands restants. Il semble clair qu'ils ont évalué approximativement les x glands enlevés. Les réponses données le montrent assez bien; «j'ai regardé!» et «je devine» sont significatifs d'un tel procédé.

Quant à Ise, elle fait un pas de plus que ces derniers dans la résolution de ce problème, en comptant les b glands restants. Comme eux cependant, elle n'utilise pas de procédé systématique pour trouver x et semble s'en tenir à une évaluation approximative de x.

Après cette dernière expérimentation avec Ise, je me suis demandé si, pour cette forme de problème (a - x = b), la difficulté provenait du fait que la totalité (a) était absente. J'ai alors décidé spontanément, contrairement à ce que j'avais prévu dans mon plan d'expérimentation, d'observer ce qui se produirait si je laissais au sujet la possibilité d'utiliser un support concret (des jetons) pour représenter les glands. Le sujet résoudrait-il maintenant le problème, sinon, quelles seraient ses réactions?

J'explique alors au sujet que je vais lui donner le même problème mais lui précise qu'il pourra, cette fois, utiliser des jetons, ses doigts, un crayon et un papier s'il le désire. Le nombre de glands du départ est a = 12 glands; j'enlève x = 3 glands alors que le sujet a le dos tourné. Il reste alors à la vue du sujet b = 9 glands. Voici une séquence de l'entrevue.

E : Combien je suis venu en chercher?

Ise : (silence) (place un à un 4 jetons devant elle)

E : Je suis venu en chercher quatre? Comment tu as fait pour trouver que je suis venu en chercher quatre?

Ise : Euh ... Il y en avait encore douze ...

E : Oui

Ise : ... puis euh ... (long silence)

Le sujet me dit ensuite qu'il n'a pas compté les glands restants. Ce qui semble confirmer que Ise fait une évaluation approximative, «à l'oeil», de ce qui a été enlevé. De plus, contrairement à ce que j'anticipais, elle n'utilise pas les jetons pour représenter le problème (les 12 jetons représentant les 12 glands, etc ...). Elle ne s'en sert que pour représenter sa réponse, soit quatre, d'ailleurs incorrecte.

iii) Problème de type concret limité (a - b = x)

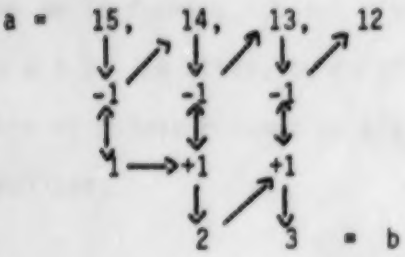
Voulant connaître le procédé utilisé par le sujet pour trouver x, je lui présente le même problème trois fois, en faisant varier à chaque fois les données (a et b). Ce n'est qu'au troisième essai (a = 15, b = 3), que j'ai compris le procédé utilisé par le sujet. Au cours des deux autres essais, Ise se contentait de donner sa réponse sans pouvoir expliquer. Voici une séquence de l'entrevue où Ise explique son procédé. Auparavant, le sujet avait trouvé x = 12.

Ise : Il y en avait quinze ...

E : Oui

Ise : ... puis on en enlève trois. On a enlevé le quinze, on a enlevé le quatorze, puis on a enlevé le treize.

Contrairement à ce que je m'attendais, Ise résout ce problème, même si la totalité (a) n'apparaît pas. Elle procède mentalement en effectuant une soustraction itérative de l'unité à la totalité a. Voici comment pourrait être schématisé ce procédé pour a = 15, b = 3.



D'autres sujets déjà rencontrés (Fra, Car, Syl et Isa: chap III para. 2 et chap II para. 3) procédaient par approximation, et ne sont pas parvenus à résoudre ce problème.

3.2.3 Eléments de réponses concernant cette première catégorie de questions:

Contrairement à ce que je m'attendais, Ise réussit à résoudre le problème de type a - b = x; il ne résout cependant pas a - x = b.

Ise a sensiblement les mêmes réactions que Fra ou Car pour ce dernier problème. Je croyais d'autre part que a - b = x serait plus difficile à résoudre que a - x = b, compte tenu qu'il en avait été ainsi avec Isa, mais tel ne fut pas le cas avec Ise.

Même si le nombre de sujets rencontrés est très limité, il semble juste d'affirmer que les problèmes de type concret limité soient plus difficiles à résoudre que les problèmes de type concret parce que le sujet doit effectuer mentalement des opérations (itérations, enlèvements, ...), en l'absence de la totalité. La réaction de Ise face aux problèmes de la forme a - x = b et a - b = x porte à croire que le problème de la forme a - b = x n'est pas plus difficile à résoudre que a - x = b. En effet, ce sujet a résolu a - b = x et non a - x = b ! Le nombre de sujets rencontrés est cependant trop limité pour autoriser à généraliser.

Les problèmes de type concret sont dans tous les cas rencontrés jusqu'à maintenant plus facilement résolus que les problèmes de type concret limité. Mais, il est assez surprenant de constater que même la possibilité d'utiliser des jetons pour résoudre a - x = b ne fut d'aucune aide pour Ise. Ce qui semble démontrer que l'activité du sujet est primordiale, comme le disait Madeleine Goutard (1963: 31):

> « ... un objet ne peut être porteur d'un sens avant que l'esprit humain le lui ait conféré. Nous pensons, comme Piaget, que les nombres ainsi que toute autre structure ne peuvent être contenus dans les objets (...) il ne faut pas

chercher les opérations dans des positions particulières des objets, mais seulement dans l'activité manuelle et mentale.»

3.3 Deuxième catégorie de questions:

Lors de la première expérimentation avec les sujets Fra et Isa, je ne leur avais pas offert la possibilité d'utiliser divers modes de représentation pour résoudre les problèmes de type concret limité. Par représentation, entendons l'usage de jetons, des doigts, de dessins, l'utilisation de chiffres ou de signes mathématiques écrits sur le papier à l'aide du crayon, ... Je me demandais alors quelles seraient leurs réactions face à la possibilité d'utiliser un mode quelconque de représentation. Auraient-ils plus de facilité à résoudre les problèmes qu'ils n'ont pas résolus lors de la première expérimentation?

Je rencontre donc Fra et Isa pour une seconde fois le 26 janvier 1983, soit 1 mois après la première expérimentation avec ces derniers (le 21 décembre 1982) et leur propose les problèmes de type concret limité qu'ils n'avaient pas résolus à ce moment (cf. première expérimentation : chap. III).

3.3.1 Description de l'expérimentation:

Je présente aux sujets (Fra et Isa) les problèmes non résolus par ceux-ci pendant la première expérimentation. Puis, je leur propose cette fois d'utiliser leurs doigts pour compter, des jetons, ou le crayon et le papier pour dessiner ou écrire.

Fra n'avait résolu aucun des deux problèmes de type concret limité. Isa avait résolu a - x = b. Je m'attendais à ce que Isa et Fra résolvent maintenant ces problèmes.

i) Le cas de Fra : problème de type concret limité (a - x = b) et représentation

J'explique d'abord au sujet qu'il peut utiliser ses doigts pour compter, ou encore des jetons (placés près de lui), un crayon, du papier pour faire des dessins ou pour écrire.

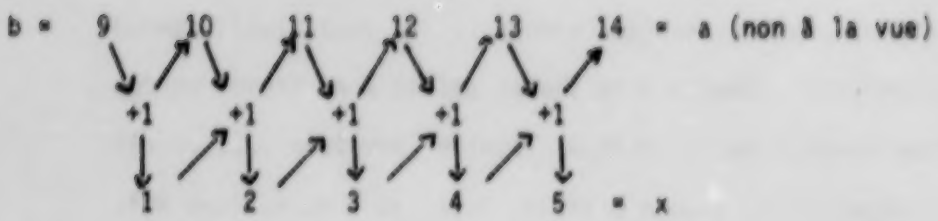
Voici une séquence de cette entrevue: L'écureuil est venu chercher x = 5 glands parmi les a = 14 glands que Fra a déjà dénombrés. Je modifie à dessein la configuration de b = 9 glands restants.

Fra : (tout bas) Il y en avait quatorze ...

E : Oui

Fra : ... puis là bien, il en reste une, deux, ..., huit, neuf. Neuf, (puis il compte levant un doigt à chacun des nombres prononcés)... dix (lève un doigt), onze (lève un autre doigt), douze, treize, quatorze (il a cinq doigts de levés). Cinq?

Contrairement à la première expérimentation, où Fra procédait comme Ise, par approximation, il résout cette fois le problème en utilisant le double comptage, qu'on peut schématiser comme ceci:



ii) Le cas de Isa et Fra : problème de type concret limité (a - b = x) et représentation

Je raconte qu'un chat vient manger b = 4 poissons de l'aquarium qui contient a = 15 poissons. Le sujet compte les a = 15 poissons de l'aquarium. Puis, l'expérimentateur enlève b = 4 poissons qu'il laisse à la vue du sujet. Ce dernier doit trouver le nombre x de poissons restants (non mangés par le chat).

Observons la réaction de Isa:

Isa: (prend immédiatement les jetons en comptant) un, deux, ..., quinze, ... il y en avait quinze (silence)
(Isa place en 2 paquets les 15 jetons: 4 puis 11 jetons)
E : Tu te souviens ce que j'avais demandé?
Isa: Oui, il y en avait quinze poissons, puis combien qu'il en restait; un, deux, trois, ... dix, onze.
(Isa compte avec les jetons).

Voyons maintenant la réaction de Fra ; voici une séquence de l'entrevue:

Fra : Quinze, (puis tout bas il répète) quinze, quinze, quinze, quinze (prend un à un les jetons en comptant). Un, deux, trois, ..., quatorze, quinze. Quinze, il en a mangé quatre (Fra déplace un à un les 4 jetons à mesure qu'il compte). Un, deux, trois, quatre.

E : Alors ...

Fra : Il en reste un, deux, ..., onze? Onze.

E : Alors il en resterait onze. OÙ il en resterait onze?

Fra : Dans l'aquarium.

Le support concret (les jetons) est utilisé de la même façon par les deux sujets, pour a - b = x. Ils utilisent a' = 15 jetons comme copie de la totalité a = 15 poissons. Puis, ils déplacent quatre jetons pour représenter les quatre poissons mangés. Les sujets comptent l'autre partie (11 jetons) représentant les 11 poissons qui restent dans l'aquarium.

3.3.2 Eléments de réponse concernant cette deuxième catégorie de questions

Fra a résolu les deux formes de problèmes a - b = x et a - x = b de type concret limité. Comme nous l'avons observé, ce sujet utilise les jetons comme copie des poissons pour résoudre a - b = x. Pour résoudre a - x = b, il n'utilise pas les jetons comme je m'attendais mais procède par double comptage (cf. 3.3.1 i) en utilisant les doigts. Lors de la première expérimentation (un mois auparavant) ce sujet procédait par approximation (cf. 3.2.1 ii).

Isa résout a - b = x de la même façon que Fra l'a fait, soit en utilisant les jetons comme copie des poissons.

Il semble que ce soit l'activité manuelle et mentale mise en branle pendant les manipulations d'objets (doigts, jetons) qui ait permis aux sujets de solutionner des problèmes, de type concret limité, non résolus lors de la première expérimentation. En accordant eux-mêmes une signification aux objets utilisés (doigts = glands, jetons = poissons), ces mêmes sujets ont apparemment utilisé des opérations intellectuelles (double comptage, copie, enlèvement, ...) d'une façon consciente.

3.4 Troisième catégorie de questions:

Nous avons déjà observé (cf. première expérimentation, chap. III) chez les sujets Fra et Syl, qu'il semblait exister une cloison étanche entre le problème et sa représentation sous forme d'équation. Dans l'esprit de ces sujets, le problème réel semble indépendant de sa notation sous forme d'une équation. Ainsi, ces sujets ont pu résoudre une équation avec un support concret, sans faire aucunement le lien avec le problème réel correspondant qu'ils venaient de résoudre. Fra, par exemple, après avoir utilisé des glands pour trouver la solution de 8 + □ = 11 ne voit pas le lien entre ces mêmes glands et la notation écrite 8 + □ = 11.

Cette cloison me semblait, à l'issue de la première expérimentation, moins étanche pour Isa que pour Fra et Syl. Isa pouvait, dans la plupart des cas, résoudre le problème, puis l'équation correspondante. Il faisait référence, pour trouver la solution de l'équation, aux nombres qu'il venait d'utiliser dans le problème correspondant. Après avoir résolu le problème de la forme $a + x = b$ ($a = 8$, $b = 11$), Isa résolvait l'équation, présentée sous sa forme écrite, ainsi: prenant 8 glands parmi les 11 déjà sur la table, il compte huit, puis le reste jusqu'à onze, pour trouver trois. Puis, alors que je lui demande s'il voit un lien entre $8 + \square = 11$ et ce qu'il vient de faire avec les glands, il répond:

«Bien ... ici ($8 + \square = 11$), il en manquait trois (glands) pour arriver à onze».

Le sujet semblait démontrer alors qu'il pouvait établir un lien entre un problème de la forme $a + x = b$ et sa notation écrite sous forme d'équation.

Un doute subsistait cependant dans mon esprit quant au type de lien établi. Je me questionnai ainsi sur la signification que Isa accordait aux signes utilisés dans une équation (chiffres, =, +, -, $\square$). D'ailleurs, j'avais aussi observé, pendant cette même expérimentation, que le signe = était ambigu chez ce même sujet. Ainsi, Isa acceptait la forme $2 + 4 = 6$, qu'il jugeait correcte, mais rejetait la forme $6 = 6$; au lieu du signe =, dans cette dernière forme, d'après ce sujet, il devrait être écrit le signe +, puis le signe =, puis, une réponse, ainsi: $6 + 6 =$ réponse.

Quelles significations Isa accorde-t-il aux signes utilisés dans une équation correspondant à un problème qu'il sait par ailleurs résoudre? Je m'attendais, en particulier, à ce que le signe □ dans l'équation, corresponde à la réponse du problème qu'il vient de résoudre, indépendamment de la relation entre les nombres représentés par une équation.

3.4.1 Description de l'expérimentation:

Je présente à Isa le problème de la forme a + x = b, (a = 8, b = 13). Puis, après que le sujet a résolu ce problème, je lui demande comment il résoudrait □ + 13 = 8. Je transforme l'expression correcte 8 + □ = 13 par l'expression erronée □ + 13 = 8[16] afin de savoir quel sens le sujet accorde à cette dernière notation en regard du problème de la forme a + x = b.

Voici la réaction de Isa dans cette situation. Je présente d'abord la séquence de l'entrevue où il résout le problème:
a + x = b, a = 8, b = 13

Isa: ... il y en avait huit

E : ... il y en avait huit ... Vire-toi de bord, je vais venir en porter (E ajoute 5 glands et place ensuite les 13 glands en un tas serré). O.K., tu peux regarder.

Isa: Il y en avait huit. (Isa compte tous les glands)
Un, deux, ..., treize!

E : Puis combien je suis venu en porter?

---

16 Erronée lorsqu'on travaille uniquement dans l'univers des entiers positifs.

Isa: Treize, euh ...

E : Quand t'as ... tu étais tournée, le petit écureuil est venu en reporter d'autres.
(E fait ici référence à la situation énoncée: c'est un écureuil qui vient ajouter des glands sur un tas).

Isa: (compte 8 glands, isole 5 glands).
Il y en avait huit ... un, deux, ..., huit, on en a rajouté (compte les glands restants), un, deux, ..., quatre, cinq.

Comme on le constate, Isa résout le problème de la forme a + x = b. Voyons maintenant comment ce sujet réagit face à l'énoncé incorrect de ce problème sous forme d'équation, soit: □ + 13 = 8 ...

E : Comment tu ferais ça (E écrit □ + 13 = 8)?

Isa: (prend les glands) J'en mettrais huit ici là (place en un tas 8 glands)

E : Oui

Isa: Un, deux, ..., six, sept, huit.

E : Hm-m

Isa: Ici, là, un, deux, ..., quatre, cinq (compte et place 5 autres glands près du tas de 8 glands) ... je marquerai cinq ici
(Isa écrit 5 dans □ de □ + 13 = 8)

Le sujet a la même réaction ici que lors de la première expérimentation, utilisant les glands ainsi qu'il le fait maintenant, et écrivant 5 dans □ de □ + 13 = 8!

Puis je poursuis à partir de ce qui est écrit:

[5] + 13 = 8.

E : ... ça voudrait dire il y avait huit ... si on ajoute cinq glands, eh bien, ça fait treize, c'est ça?

Isa: Oui

Ici, je fais une traduction verbale correcte du problème, afin de vérifier quelle signification le sujet accorde à la forme incorrecte [5] + 13 = 8. Le sujet semble d'accord avec cette dernière interprétation.

3.4.2 Eléments de réponse concernant la troisième catégorie de questions

Ce sujet peut apparemment faire une traduction verbale correcte du problème de la forme a + x = b. Cependant, la traduction écrite sous forme d'équation ne traduit pas correctement cette dernière forme verbale. Nous pourrions schématiser ces dernières remarques comme suit:

Problème résolu	⟶	Traduction verbale du problème correcte	⟶/	Traduction écrite du problème
(a + x = b)		(Il y a «a» glands, si on ajoute «x» glands, il y aura alors «b» glands)		(x + b = a: équation incorrecte)

Comme ce schéma veut le montrer, il existe une coupure (⟶/) entre la traduction verbale et la traduction écrite.

Il semble que ce sujet accorde une valeur de «réponse» au signe « □ » écrit dans une équation. □ + 13 = 8 semble traduit par: «8 + □ va égaler 13, □ étant un nombre à chercher». Le signe égale n'exprime donc pas une relation entre le couple (□, 13) et le nombre 8.

3.5 En résumé

Nous avons vu que les problèmes de type concret limité semblent, pour tous les sujets rencontrés jusqu'à maintenant, plus difficiles à résoudre que les problèmes de type concret. Ces types de problèmes obligent le sujet à effectuer mentalement des opérations (enlever, soustraire itérativement, ...). Et ces opérations doivent être effectuées sans l'aide du support concret, contrairement aux problèmes de type concret où les données sont toujours présentes et manipulables par le sujet.

Chez Fra et Isa, le recours à des représentations (doigts, jetons,...) a facilité la résolution de ces problèmes. Ces types de problèmes ont semblé alors aussi faciles que les problèmes de type concret. Nous avons cependant constaté chez Ise que la possibilité d'utiliser des jetons n'a semblé lui être d'aucune aide pour résoudre le problème de la forme $a - x = b$.

Outre la difficulté des sujets à résoudre les problèmes de type concret limité, nous avons aussi observé la cloison réelle qui existe entre les problèmes et leur notation sous forme d'équation.

Le cas de Isa nous a fait voir que le signe = dans une équation est la marque d'une réponse à donner, indépendamment de la relation entre les nombres que l'équation exprime.

4. Troisième expérimentation:[17] une hypothèse à vérifier

La difficulté qu'éprouvent des sujets avec les problèmes de type concret limité semble tenir à l'absence de la totalité. Dans le même sens, la facilité des sujets à résoudre les problèmes de type concret semble dépendre de la présence de la totalité.

Au cours de cette troisième expérimentation, j'ai voulu vérifier si, en d'autres termes, le facteur absence ou présence de la totalité a une influence significative sur la difficulté des sujets à résoudre les problèmes de type concret limité ou de type concret.

4.1 Procédure d'expérimentation:

Pour contrôler cette hypothèse, j'ai modifié les problèmes de type concret limité en rendant présente la totalité et présenté ces problèmes aux sujets. De même, j'ai modifié les problèmes de type concret, en rendant absente la totalité; ces problèmes ont eux aussi été présentés aux mêmes sujets.

---

[17] Cette troisième expérimentation se déroula deux mois après la deuxième expérimentation, soit en mars 1983.

Si cette modification dans la présentation des problèmes aux sujets apporte des changements notables dans la réussite des sujets à résoudre les problèmes de type concret et concret limité, ceci tendra à démontrer que la présence ou l'absence de la totalité est un facteur déterminant la plus ou moins grande difficulté des sujets à résoudre ces types de problèmes.

Convenons de nommer problèmes de type concret limité modifié, les problèmes de type concret limité pour lesquels l'expérimentateur rend présente la totalité au sujet. Les problèmes de type concret modifié sont les problèmes de type concret pour lesquels l'expérimentateur rend absente la totalité au sujet pendant l'expérimentation. Les problèmes de type concret seront maintenant nommés de type concret standard, et les problèmes de type concret limité seront nommés problèmes de type concret limité standard.

4.2 Description des situations présentées aux sujets:

L'annexe 10 décrit la situation présentée aux sujets pour chacune des formes de problèmes modifiés (concret ou concret limité). L'annexe 11 est une représentation visuelle des problèmes modifiés. Les situations présentées pour les problèmes standards sont les mêmes que précédemment (cf. annexe 9).

4.3 Déroulement de l'expérimentation et cueillette des données:

J'ai présenté à cinq sujets les problèmes de type standard et de type modifié. Certains sujets ayant déjà réussi certaines

formes de problèmes de type standard (Fra, Isa et Syl) lors de la première expérimentation, je ne leur ai pas présenté ces mêmes formes de problèmes. D'autre part, certains sujets (Fra, Isa) n'avaient pas résolu des problèmes de type concret limité standard. Je leur ai alors présenté à nouveau les mêmes problèmes car il était possible qu'il y ait eu apprentissage dans l'intervalle de temps entre la première et la troisième expérimentation. Un nouveau sujet apparaît dans les données recueillies. Il s'agit de Mel (8;8). Ce sujet est de niveau de deuxième année, et qualifié par l'enseignante titulaire comme étant un élève éprouvant des difficultés en mathématique, particulièrement avec les équations.

Toutes les données ont été recueillies à partir d'entrevues individuelles enregistrées sur cassettes, avec chacun des sujets. Ces données ont été compilées dans un tableau à l'annexe 12.

4.4 Analyse des données du tableau (annexe 12)

Sur le tableau 12 est présenté, pour chacun des sujets, son résultat en regard de toutes les formes de problèmes. Un x sous la colonne R indique que le sujet a réussi à résoudre le problème, tandis qu'un x sous la colonne NR indique que le sujet n'a pas réussi à résoudre le problème. Un * sous la colonne R indique que le sujet a réussi à résoudre le problème, mais après un certain nombre d'essais et d'erreurs. Pour la forme $x - a = b$, nous avons noté par I les résultats de Mel et Syl, signifiant un résultat incertain. Les symboles x et * sont considérés comme des problèmes réussis par les sujets. Le tableau présente la totalité des problèmes réussis et non réussis pour chaque forme de problèmes pour tous les sujets.

D'une façon globale, nous observons que les problèmes de type concret limité standard sont plus difficiles à résoudre que les problèmes de type concret standard. Après modification, les problèmes de type concret limité sont devenus plus faciles à résoudre que les problèmes de type concret modifié. De plus, ces derniers problèmes ont été réussi dans 6 cas sur 16 selon un procédé d'essai et d'erreur. Ainsi, nous observons un renversement de la situation observée par rapport aux problèmes standards.

Le tableau qui suit met en évidence ces résultats; il présente le total de sujets ayant réussi ou non chacun des types de problèmes, de même que l'indice de difficulté de chaque type obtenu en divisant le nombre de problèmes non réussis par le nombre de problèmes présentés aux sujets.

Tableau 5: Indice de difficulté des différents types de problèmes

	CONCRET LIMITE				CONCRET				
	STANDARD		MODIFIE		STANDARD			MODIFIE	
	R	NR	R	NR	R	NR	I*	R	NR
	7	3	10	0	18	0	2	16	4
Indice de difficulté	0,3		0		0			0,2	

* I = résultat incertain: nous n'avons pas tenu compte de ce résultat dans le calcul de l'indice de difficulté.

ind. de difficulté = $\frac{R}{\quad}$

On observe, à partir de ce tableau, que les indices de difficulté des problèmes du type concret limité modifié et du type concret standard sont tous deux nuls. De plus, l'indice de difficulté des problèmes de type concret limité standard (0,3) est légèrement supérieur à celui des problèmes de type concret modifié (0,2).

De plus, la modification du type concret limité (en rendant la totalité présente) a produit un changement significatif de l'indice de difficulté, passant de 0,3 à 0. De même, la modification du type concret (en rendant la totalité absente) a produit un changement significatif de l'indice de difficulté, passant de 0 à 0,2.

4.5 Interprétation des résultats

Ces derniers résultats semblent montrer que les problèmes sont mieux résolus lorsque la totalité est présente, ou rendue présente (à la vue et au toucher des sujets). Inversement, lorsque la totalité est absente ou rendue absente (de la vue et du toucher), les problèmes sont plus difficilement résolus. C'est le cas pour les problèmes de type concret limité et concret modifié. Dans ce dernier cas, les sujets rencontrés devaient faire appel à des actions exécutées mentalement (ajouter, enlever, compter, transformer, ...).

5. OÙ en suis-je?

A ce stade de la recherche, certaines questions se précisèrent, d'autres

s'ajoutèrent. Elles donnèrent lieu à la dernière phase de cette recherche présentée au chapitre IV.

Premièrement, il me semblait juste d'affirmer que la présence ou l'absence de la totalité déterminait la plus ou moins grande difficulté des sujets à résoudre les problèmes. Cela avait été vérifié auprès de quelques sujets, mais qu'en était-il pour une population plus large d'enfants?

Deuxièmement, le recours à des représentations symboliques (doigts, jetons, mini-cubes, ...) semblait faciliter la résolution des problèmes de type concret limité. En était-il de même pour les autres types de problèmes (concret et concret modifié), et pour les équations? Le recours à des objets par les sujets faciliterait-il la résolution des problèmes et des équations?

Finalement, il semblait que les sujets avaient autant de difficulté (sinon plus!) à résoudre les équations que les problèmes correspondants. J'avais constaté les difficultés d'interprétation de certains sujets devant ce symbolisme. Et alors, me demandai-je, si l'équation est plus difficile à résoudre que le problème correspondant, elle n'aide sûrement pas les enfants à résoudre un problème! De ce point de vue, l'équation ne serait pas une représentation appropriée pour des enfants de cet âge et pour de tels problèmes. Qu'en était-il réellement?

Ces trois questions se transformèrent en hypothèses à vérifier auprès des enfants. C'est dans une population plus large d'enfants que je voulus alors cueillir les données. Cela permettrait une plus grande justesse dans l'interprétation, et la possibilité d'obtenir des résultats plus généraux.

CHAPITRE IV

1. Introduction:

La présente recherche, amorcée en avril 1981, était issue d'un problème identifié auprès d'un groupe-cible de quinze enseignantes de première année de ma commission scolaire. Après les expérimentations décrites au chapitre III (en mars 1983), le question suivante surgit: «Les phénomènes observés jusqu'à maintenant auprès de quelques sujets se retrouvent-ils dans un échantillon d'une population d'enfants?» C'est ainsi que l'expérimentation rapportée dans ce quatrième chapitre se réalisa auprès de classes d'enfants de première année (en juin 1983) et de classes d'enfants de deuxième année (en octobre 1983).

Ce chapitre traitera successivement:

i) des hypothèses motivant l'expérimentation;

ii) du modèle d'expérimentation adopté pour tester les hypothèses;

iii) des résultats obtenus auprès d'un échantillon d'une population d'enfants de première année (juin 1983), de l'interprétation des résultats et des questions soulevées;

iv) d'une cueillette de données auprès d'une population d'enfants de deuxième année (octobre 1983) ayant pour but de répondre aux questions soulevées en iii;

v) et finalement de l'interprétation finale des résultats obtenus en iii et iv.

2. Les hypothèses de départ motivant l'expérimentation:

J'avais choisi de procéder à une expérimentation auprès de classes d'enfants de première année.[18] A ce moment (avril - mai 1983) certaines hypothèses se précisèrent et donnèrent lieu à l'expérimentation qui sera traitée au paragraphe trois. Voici les hypothèses telles qu'elles furent énoncées alors:

2.1 Première hypothèse:

Le facteur absence ou présence de la totalité aurait une influence significative sur la difficulté des sujets à résoudre les problèmes de type concret limité ou de type concret. Ainsi, les problèmes de type concret limité seraient plus difficiles à résoudre que les problèmes de type concret. De même, les problèmes de type concret modifié (totalité absente) seraient plus difficiles à résoudre que les problèmes de type concret (totalité présente) et les problèmes de type concret limité (totalité absente) seraient plus difficile à résoudre que les problèmes de type concret limité modifié (totalité présente).

Cette première hypothèse, qui semblait se vérifier pour les cinq sujets déjà cités (chap III, para. 4), se vérifierait-elle auprès d'un nombre plus grand de sujets?

---

18 En octobre 1983, une partie de cette expérimentation fut reprise auprès de deux classes d'enfants de deuxième année.

2.2 Deuxième hypothèse:

La possibilité d'utiliser un support concret des (mini-cubes) devrait avoir une influence significative sur la résolution des équations et des problèmes par les sujets. Pas résultats contradictoires à ce propos étaient cependant apparus lors d'entrevues individuelles (chap. III, para. 3.5).

2.3 Troisième hypothèse:

Les problèmes seraient mieux résolus que les équations correspondantes. Cette hypothèse devrait se vérifier dans les deux cas suivants:

- les sujets utilisent des objets (mini-cubes ou jetons) pour représenter le problème ou l'équation;
- les sujets n'utilisent pas d'objets (mini-cubes ou jetons) pour représenter le problème ou l'équation.

L'expérimentation mise sur pied à ce moment constituait un moyen de contrôler et préciser ces hypothèses selon le modèle décrit ci-dessous.

3. Le modèle d'expérimentation pour les classes de première année:[19]

3.1 La mise au point du modèle:

Au départ, je devais rencontrer neuf classes d'enfants de première année.

---

[19] Le modèle expérimental utilisé avec les classes de deuxième année sera présenté au paragraphe 5 du présent chapitre.

Ces classes furent sélectionnées selon trois milieux d'appartenance (milieu dit «favorisé», «moyen» et «défavorisé») et selon le type de pédagogie pratiquée par l'enseignante (pédagogie dite «traditionnelle», «moyennement traditionnelle» et «non traditionnelle»). Les caractéristiques définissant un type de pédagogie ne furent pas explicitées au moment de la sélection réalisée conjointement avec le directeur de l'enseignement (l'annexe 13 présente les caractéristiques sur lesquelles j'ai personnellement fondé mon choix). Les neuf classes identifiées selon les critères milieu et pédagogie firent cependant l'objet d'un consensus entre le directeur de l'enseignement et moi, et représentaient toutes les combinaisons possibles de types de classes. Cette opération permettait d'obtenir un échantillon représentatif.

Je devais moi-même conduire l'expérimentation pendant que l'enseignante titulaire assistait à l'expérience avec ses élèves. Cette dernière expérience avec des groupes d'enfants devait ressembler le plus possible à l'entrevue individuelle afin de permettre des comparaisons dans les données. Comme nous le verrons plus loin, trois classes furent ainsi «sacrifiées» pour mettre au point une stratégie d'expérimentation permettant de tester, sans trop biaiser, les hypothèses énoncées précédemment.

Globalement, trois types de situations allaient être présentées à des classes de première année:

- des équations à résoudre avec papier et crayon;
- les 6 problèmes de type concret limité et concret;
- les 6 problèmes de type concret limité modifié et concret modifié.

Chacune de ces situations devait être présentée d'abord sans que les sujets utilisent un matériel, ensuite en fournissant aux sujets un support concret (des mini-cubes).

Comme je le disais précédemment, les trois premières expérimentations furent exécutées au complet dans trois classes différentes. Les trois enseignantes concernées avaient, au préalable, exprimé leur accord pour que je procède à cette expérimentation. Ces classes me permirent de mettre au point des situations et un contexte qui se rapprochaient le plus possible des situations et du contexte qu'on retrouvait en entrevue individuelle.

A ce moment-là, je fus confronté au problème principal rencontré pour la mise au point, soit celui de contrôler ou du moins amoindrir le plus possible l'effet de certains facteurs sur les données recueillies surtout face aux problèmes présentés aux sujets (concret limité, concret et modifié):

- la compréhension des consignes par les sujets dans un temps limité, et d'une façon univoque;
- l'attention soutenue des sujets et leur motivation pour les problèmes;
- la tentation pour plusieurs sujets de «souffler» la réponse, spontanément;
- l'impossibilité pour l'expérimentateur d'être certain (comme c'était le cas en entrevue individuelle) de la compréhension des consignes par chacun des sujets.

C'est donc en réalisant l'expérimentation au complet dans ces trois classes que fut mis au point, par essais et erreurs de ma part, un protocole expérimental satisfaisant.

Certaines procédures furent ainsi modifiées afin de pallier aux difficultés rencontrées pendant la mise au point. Voici les principales modifications apportées:

- l'expérimentation serait répartie en cinq séances plutôt qu'en deux ou trois séances dans chacune des classes de l'échantillon. J'avais observé que des effets de fatigue pouvaient biaiser les résultats, surtout à la fin d'une séance trop longue;
- l'expérimentateur prendrait le temps d'établir un bon contact avec les enfants, de les mettre en situation et de faire une objectivation avec eux après chacune des séances. Il était important que les sujets et l'expérimentateur s'acclimatent, prennent contact, ... l'objectivation de la fin permettant de recueillir des données supplémentaires;
- les situations présentées seraient variées afin de motiver les sujets et de soutenir leur attention en groupe;
- de plus, les six problèmes seraient présentées sous forme d'une histoire plutôt qu'en six histoires séparées d'un contexte. Les six questions seraient présentées pendant l'histoire;
- une situation devait être imaginée afin que les sujets ne «soufflent» pas la réponse aux autres;
- le montage initial (objets, décor, acteurs) fut modifié pour arriver finalement à un montage où le décor et les acteurs des histoires (arbre, écureuil, noix, biscuits, bébé, etc ...) étaient à la vue de tous. Les histoires étaient simulées par des objets réels (noix, biscuits) ou par des représentations d'objets réels (écureuil, arbre, bébé, ...) de façon que les histoires aient un caractère de vraisemblance: je mimais l'histoire dans ce décor (cf. Le montage: annexes 16 et 18).

Telles furent les principales modifications[20] apportées suite aux difficultés d'expérimentation rencontrées dans trois classes. Les commentaires des enseignantes de ces classes et de certains enfants, de même que les comportements de ces derniers, m'ont permis d'adapter la procédure utilisée en entrevue individuelle à une expérimentation auprès de groupes d'enfants (allant de 19 à 27 sujets par groupe). La fin de l'année scolaire approchant (c'était au début de juin 1983), je fus contraint de réduire l'échantillon à quatre classes, une fois que le protocole d'expérimentation fut mis au point. Les quatre classes d'enfants appartenaient à quatre écoles différentes, ce qui éliminait l'effet de contamination d'un enfant à l'autre dans une école. Chacune des enseignantes titulaires m'avait donné son accord à l'expérimentation que je désirais mener. Le tableau suivant définit les quatre classes selon les paramètres milieu et type de pédagogie de l'enseignante: ces classes seront identifiées par une lettre (A, B, C, D). Par ailleurs, ce choix a comme utilité de fournir un échantillon représentatif de toute la population d'élèves; ce choix ne vise pas à tester l'hypothèse de l'influence du milieu ou de la pédagogie sur les résultats obtenus.

Tableau 6: types de classes de l'échantillon et nombre de sujets

Pédagogie \ Milieu	Favorisé	Moyen	Non favorisé
Traditionnelle		B (27)	
Moyennement traditionnelle		A (27)	C (22)
Non traditionnelle	D (19)		

[20] Ces modifications seront rapportées plus en détail au point 3.2 lors de la description du protocole d'expérimentation adopté.

3.2 Le protocole d'expérimentation:

L'expérimentation dans chacune de ces quatre classes d'enfants se réalisa du début de juin jusqu'au 20 juin 1983, après avoir informé les quatre enseignantes titulaires du type d'expérimentation et obtenu leur adhésion à l'expérience. Dans chacune de ces classes, il y eut cinq sécances d'expérimentation. Ces séances se déroulaient, pour une classe donnée, soit à des moments différents de la journée (avant ou après une récréation), soit à des jours ou des semaines différents: cela me permettait d'enregistrer les données et de corriger immédiatement un élément de la procédure susceptible de biaiser les résultats. De plus, la motivation des sujets était maintenue: la plupart du temps, les enfants attendaient fébrilement ma venue.

Chacune des séances d'expérimentation comportait une brève mise en situation (2-3 min.), l'activité d'expérimentation, puis une période d'objectivation sur l'expérimentation (3-5 min. environ).

Le tableau suivant indique la répartition et la description sommaire de chacune des cinq séances. On retrouvera aux annexes 14 à 19 la description détaillée de chacune de celles-ci.

Tableau 7: description sommaire des séances d'expérimentation

# séance	Description
1	Première partie: Les enfants résolvent individuellement sur papier et avec crayon une série de douze équations écrites sur une feuille qui leur a été distribuée; une fois que les sujets ont terminé, on passe à la deuxième partie de la séance 1. Deuxième partie: Les enfants résolvent individuellement sur papier et avec crayon une série de douze équations différentes de celles de la première partie, mais cette fois en utilisant des mini-cubes qu'on leur a distribués.
2	L'expérimentateur, à l'aide d'un dispositif représentant «l'histoire de l'écureuil» présente les six formes de problèmes standard. Les sujets répondent individuellement sur une feuille aux six questions posées par l'expérimentateur pendant l'histoire.
3	Idem 2; les sujets utilisent cette fois des mini-cubes.
4	L'expérimentateur, à l'aide d'un dispositif représentant «l'histoire des biscuits», présente les quatre formes de problèmes modifiés. Les sujets répondent individuellement sur une feuille aux quatre questions posées par l'expérimentateur pendant l'histoire.
5	Idem 4; les sujets utilisent cette fois des mini-cubes.

Le paragraphe qui suit présentera les résultats obtenus en regard de chacune des hypothèses avancées au départ. Ces données seront interprétées à la lumière des résultats obtenus.

4. Les résultats obtenus relativement à chacune des hypothèses, et leur interprétation:

4.1 Résultats obtenus en regard de la première hypothèse:

On se rappelle que j'avais émis l'hypothèse que le facteur absence ou présence de la totalité (noix ou biscuits) aurait une influence significative sur la fréquence de réussite des sujets. Cette hypothèse se vérifierait en confrontant les sujets à des problèmes des deux types. Pour chacune des formes de problèmes, les sujets avaient à répondre à deux types de problèmes. Dans un de ces types, la totalité était absente de la vue des sujets; dans l'autre type, la totalité était présente de la vue des sujets. Le tableau suivant présente les différents cas présentés aux sujets.

Tableau 8 : Types de problèmes présentés.

#	FORMES DE PROBLEMES	TYPES DE PROBLEMES	
		TOTALITE ABSENTE	TOTALITE PRESENTE
1	a - x = b	concret limité	concret limité modifié
2	a - b = x	concret limité	concret limité modifié
3	a + b = x	concret modifié	concret
4	a + x = b	concret modifié	concret
5	x - a = b	concret modifié	concret
6	x + a = b	concret modifié	concret

Le tableau suivant présente les résultats obtenus, pour chacune des formes de problèmes dans les deux types de situations présentées (totalité présente, totalité absente). Dans ce tableau: f_a est la fréquence de réussite (le nombre de sujets ayant réussi cette forme de problème) lorsque la totalité est absente; f_p est la fréquence de réussite lorsque la totalité est présente.

Tableau 9: Fréquence de réussite pour chacune des formes de problèmes lorsque la totalité est absente, et lorsque la totalité est présente (N de l'échantillon est 74 sujets).

#	FORMES	f_a	f_p
1	a - x = b	52	55
2	a - b = x	48	57
3	a + b = x	60	58
4	a + x = b	56	37
5	x - a = b	48	54
6	x + a = b	31	55

Le nombre N de l'échantillon a été porté à 74 sujets. Des sujets ont été éliminés pour les raisons suivantes: sujets absents lors de certaines séances, réponses rejetées à cause de difficulté d'interprétation (ratures, chiffre mal formé, etc.). Vingt et un sujets ont ainsi dû être éliminés de l'échantillon de départ qui en comportait quatre-vingt-quinze. Cette dernière opération permet de garder ce nombre constant afin de pouvoir comparer les données recueillies.

Pour que la différence entre les fréquences (f_p - f_a) soit significative au niveau de 5% de probabilité, on doit obtenir un «chi deux» égal au moins à 3,84. En appliquant cette méthode statistique aux fréquences trouvées expérimentalement, on obtient les résultats inscrits au tableau 10 (Dayhaw, 1966).

Le tableau ci-dessous donne la valeur du «chi deux» pour les différentes formes de problèmes et le niveau de probabilité correspondant à cette valeur. Par exemple, pour la forme 1, la différence des fréquences est significative à un niveau de 70-80% de probabilité. Cette probabilité est trop élevée et ne justifie pas le rejet de l'hypothèse nulle selon laquelle les fréquences (f_p et f_a) se distribuent également ($f_p = f_a$). Dans ce cas, la présence ou l'absence de la totalité n'induit pas de changement significatif dans les fréquences.

Tableau 10 : Valeur de chi deux caculée pour chacune des formes de problèmes.

#	FORMES	$f_p - f_a$	VALEUR DE CHI DEUX	NIVEAU APPROXIMATIF DE PROBALITE (%)	DIFFERENCE SIGNIFICATIVE	
					OUI	NON
1	a - x = b	+ 3	0,08	70 - 80		x
2	a - b = x	+ 9	0,77	30 - 50		x
3	a + b = x	- 2	0,03	80 - 90		x
4	a + x = b	-19	3,88	5	x	
5	x - a = b	+ 6	0,35	50 - 70		x
6	x + a = b	+24	6,70	1	x	

4.2 Interprétation des résultats en regard de la première hypothèse:

La présence de la totalité a-t-elle amené un changement significatif dans la fréquence de réussite? En consultant le tableau 10, on se rend compte qu'elle n'a produit un changement significatif que pour les problèmes de forme 4 et 6. Les sujets réussissent significativement mieux la forme 6 lorsque la totalité est présente. Inversement, ils réussissent significativement moins la forme 4 lorsque la totalité est présente! Comment expliquer cela pour la forme 4?

En revisant le protocole et les erreurs dans les réponses des sujets pour la forme 4, on constate: 1° A la question «combien l'écureuil a transporté de noix?» 20 sujets répondent par « 12» ou «7» (ces réponses dénotent une mauvaise compréhension de la question étant donné le contexte), tandis qu'à la question «combien j'ai ajouté de biscuits?» (totalité absente), seulement 7 sujets répondent par «12» ou «7». Il semble donc que la question est moins ambiguë lorsque la totalité est absente que lorsque la totalité est présente. 2° 8 erreurs sont dues au comptage lorsque la totalité est présente comparativement à 3 lorsque la totalité est absente: ici, une réponse ayant un écart de 1 avec la réponse correcte était considérée comme erreur due au comptage. Une explication serait qu'il y aurait un plus grand risque d'erreur lorsque la totalité est présente (les sujets étaient trop loin du montage pour compter effectivement les noix en les prenant dans leurs mains) que lorsque la totalité est absente. Dans ce dernier cas, les sujets comptaient soit dans leur tête, soit sur leurs doigts.

Dans le cas des formes 1,2 et 5 la présence de la totalité induit un léger effet positif (non significatif); l'effet est presque nul pour la forme 3. Comment expliquer ces résultats? L'absence de la possibilité du comptage effectif (par le toucher) des objets par les sujets expliquerait le résultat pour la forme 3. Cela induit, comme je l'ai souligné, un risque d'erreur plus grand que si les sujets comptent mentalement ou sur les doigts. De plus, j'avais observé les erreurs de comptage de certains sujets pour les problèmes de type concret limité modifié (forme 1, 2). Ces erreurs se produisaient lorsque ces sujets plaçaient «autant de cubes que de noix», et lorsqu'ensuite ils enlevaient un certain nombre de cubes, à ces cubes. Ces différentes sources d'erreur ne se retrouvaient pas lors des entrevues individuelles puisqu'à ce moment, l'expérimentateur pouvait faire recompter le sujet lorsqu'il y avait erreur de comptage, ou réexpliquer la consigne lorsqu'elle n'était pas comprise.

Les problèmes de type concret limité (formes 1 et 2) sont-ils significativement moins bien réussis que les problèmes de type concret (formes 3, 4, 5, 6)? Les valeurs de chi deux calculées pour deux de ces formes comparées deux à deux indiquent qu'il n'y a pas de différence significative entre les fréquences f_p et f_a pour un niveau de probabilité de 5% (cf. tableau 11). Dans ce tableau les signes (+) et (-) indiquent la valeur positive (+) ou négative (-) de la différence $f_p - f_a$.

Tableau 11: Valeur de chi deux pour les fréquences de réussite aux problèmes concret limité vs les fréquences de réussite aux problèmes concrets.

CONCRET / CONCRET LIMITE	3	4	5	6
1	0,33 (+)	2,53 (-)	0,04 (-)	0,08 (+)
2	0,94 (+)	1,42 (-)	0,35 (+)	0,48 (+)

Il semble que le fait que la totalité soit présente seulement à la vue des sujets puisse expliquer en partie les différences non significatives observées. D'ailleurs, quelques sujets ont dit qu'ils aimeraient «avoir des vraies noix pour compter» pendant l'expérimentation. D'autres sujets s'approchaient spontanément du montage pour venir compter effectivement les noix ou les biscuits qu'ils pouvaient compter à la vue.

En somme, il est donc probable que, dans les conditions de l'expérimentation, la présence de la totalité à la vue des sujets n'affecte pas les fréquences de réussite aux formes de problèmes présentées (sauf pour les formes 4 et 6). Pour la forme 6, la présence de la totalité semble avoir affecté positivement la fréquence de réussite des sujets. On constate cependant que la présence de la totalité a, dans certains cas, un effet négatif significatif sur la fréquence de succès à un niveau de probabilité se situant à 5%: ce fut le cas pour la forme 4 (f_a et f_p). Pour la forme 1 (f_a) comparée à la forme 4 (f_p), il en fut de même , mais cette fois à un niveau de probabilité se situant entre 10% et 20% (chi carré = 2,53). L'absence de comptage effectif par les sujets (lorsque la totalité est présente) semble être un facteur explicatif important. Ce dernier pourrait expliquer en partie les effets négatifs, nul ou légèrement positif sur les fréquences obtenues par les sujets.

4.3 Résultats obtenus en regard de la deuxième hypothèse:

L'usage de matériel (mini-cubes) aurait-il une influence significative sur la fréquence de réussite des sujets face aux différentes formes d'équations ou de problèmes? J'avais émis l'hypothèse que la fréquence de réussite des sujets serait plus grande lorsque les sujets utilisent des mini-cubes, comparativement à la fréquence obtenue lorsque les sujets n'utilisent pas de mini-cubes.

Cependant, plusieurs sujets n'utilisaient pas nécessairement les mini-cubes lorsque je leur en distribuais pour compter avec ces derniers. Souvent, ils préféraient «compter sur leurs doigts» ou «compter dans leur tête».

Les résultats obtenus mesurent donc plutôt l'influence de la possibilité pour les sujets d'utiliser des mini-cubes, sur la fréquence de réussite des sujets aux équations et aux problèmes. D'autre part, pour les problèmes de forme 1 et 2, les résultats mesurent l'influence de l'utilisation des mini-cubes sur la fréquence de réussite. En effet, dans ces cas, l'expérimentateur demandait explicitement aux sujets de «placer autant de cubes qu'il y a de noix».

Pour vérifier cette hypothèse, douze équations (2 pour chacune des six formes: cf. annexe 14) furent données à résoudre. La première série était résolue sans que les sujets aient la possibilité d'utiliser des mini-cubes. Puis, les sujets ont la possibilité d'utiliser des mini-cubes, qu'ils ont à leur disposition, pour résoudre la deuxième série d'équations. Ces équations étaient présentées au hasard sur la feuille: six contenaient des nombres inférieurs ou égaux à dix, six autres avaient un des nombres impliqués supérieur ou égal à dix, mais inférieur à seize. Les équations peuvent ainsi être classées comme suit:

Tableau 12: Equations présentées aux sujets.

#	FORMES	EQUATIONS PRESENTEES AUX SUJETS SANS UTILISATION DE MINI-CUBES	
		Nombres impliqués $m \leq 10$	Un des nombres $10 < m < 16$
1	a - x = b	9 - □ = 5	12 - □ = 8
2	a - b = x	10 - 3 = □	13 - 8 = □
3	a + b = x	3 + 4 = □	6 + 7 = □
4	a + x = b	5 + □ = 8	7 + □ = 12
5	x - a = b	□ - 3 = 2	□ - 5 = 8
6	x + a = b	□ + 8 = 10	□ + 4 = 11

#	FORMES	EQUATIONS PRESENTEES AUX SUJETS AVEC UTILISATION DE MINI-CUBES	
		Nombres impliqués $m < 10$	Un des nombres $10 \leq m < 16$
1	a - x = b	8 - □ = 5	12 - □ = 8
2	a - b = x	9 - 5 = □	11 - 5 = □
3	a + b = x	6 + 1 = □	9 + 7 = □
4	a + x = b	4 + □ = 6	8 + □ = 10
5	x - a = b	□ - 5 = 4	□ - 3 = 10
6	x + a = b	□ + 2 = 7	□ + 4 = 11

De même, des données furent recueillies concernant la fréquence de réussite des sujets pour les problèmes suivants:

- les problèmes de type concret limité et de type concret, avec et sans l'usage de mini-cubes;
- les problèmes de type concret modifié avec et sans l'usage de mini-cubes.

Les tableaux 13 et 14 présentent les résultats obtenus aux équations et aux problèmes. Dans ces tableaux, f indique la fréquence de réussite des sujets sans faire usage de mini-cubes; f_c indique la fréquence de réussite des sujets avec l'usage de mini-cubes. N_c et N indiquent respectivement le nombre de sujets de l'échantillon avec et sans usage de mini-cubes.

Tableau 13: Fréquence de réussite des sujets aux équations avec et sans l'usage de mini-cubes.

#	FORMES	EQUATIONS ($n \leq 10$)		EQUATIONS (un des nombres $10 \leq n < 16$)	
		f (N = 74)	f_c (N_c = 74)	f (N = 74)	f_c (N_c = 74)
1	a - x = b	58	64	46	54
2	a - b = x	62	56	43	60
3	a + b = x	69	71	56	57
4	a + x = b	61	62	50	57
5	x - a = b	32	31	23	33
6	x + a = b	56	55	45	53

Tableau 14: Fréquence de réussite des sujets aux problèmes avec et sans l'usage de mini-cubes (N = 74).

#	FORMES	PROBLEMES (le plus grand nombre impliqué n: $10 \leq n < 16$)			
		CONCRET LIMITE ET CONCRET		CONCRET MODIFIE	
		f	f_c	f	f_c
1	a - x = b	52	55		
2	a - b = x	48	57		
3	a + b = x	58	66	60	61
4	a + x = b	37	53	56	51
5	x - a = b	54	54	48	49
6	x + a = b	55	43	31	34

4.4 Interprétation des résultats en regard de la deuxième hypothèse:

Les tableaux 15 et 16 qui suivent donnent les valeurs de chi deux pour les équations et les problèmes. Ces valeurs sont celles où l'hypothèse nulle est un partage égal de fréquence: c'est le cas où l'effet des mini-cubes est nul. La table de chi deux demande une valeur égale à au moins 3,84 pour que les résultats soient significatifs au niveau de 5% de probabilité.

Tableau 15: Valeur de chi deux calculée pour éprouver l'hypothèse de fréquences égales (f_c et f) pour les équations avec et sans mini-cubes.

#	FORMES	EQUATIONS $n \leq 10$		EQUATIONS $10 \leq n < 16$	
		$f_c - f$	Valeur de chi deux	$f_c - f$	Valeur de chi deux
1	a - x = b	6	0,3	8	0,64
2	a - b = x	4.	0,13	17	2,81
3	a + b = x	2	0,03	1	0,01
4	a + x = b	1	0	7	0,47
5	x - a = b	-1	0,02	10	1,79
6	x + a = b	-1	0,01	8	0,65

Tableau 16 Valeur de chi deux calculée pour éprouver l'hypothèse de fréquences égales (f_c et f) pour les problèmes avec et sans mini-cubes.

#	FORMES	CONCRET LIMITE ET CONCRET		CONCRET MODIFIE	
		$f_c - f$	Valeur de chi deux	$f_c - f$	Valeur de chi deux
1	a - x = b	3	0,08		
2	a - b = x	9	0,77		
3	a + b = x	8	0,52	1	0
4	a + x = b	16	2,84	-5	0,23
5	x - a = b	0	0	-1	0,02
6	x + a = b	-12	1,47	3	0,14

Les valeurs du chi deux montrent qu'on n'est pas en droit d'écarter l'hypothèse nulle. Je dois donc conclure qu'il est possible que la population totale des élèves obtienne des fréquences égales avec et sans mini-cubes.

Cependant, on observe que, pour les équations, les valeurs du chi deux ont tendance à augmenter pour n plus grand. On pourrait alors supposer que plus n est grand dans une équation, plus l'effet de l'usage de matériel est utile.

On observe aussi des cas limites. Ainsi en est-il de l'équation de la forme a - b = x ($10 \leq n < 16$) et du problème de forme a + x = b (concret). Dans ces deux cas, les différences de fréquence seraient significatives à un niveau de probabilité inférieur à 10%. A ce niveau de probabilité on pourrait

prétendre à un effet probablement positif de l'usage de mini-cubes. Mais comment expliquer alors qu'il en soit ainsi seulement dans ces deux cas, et non pour les autres cas?

Les résultats pour l'équation a - b = x peuvent s'expliquer par les facteurs suivants:

- les sujets ont résolu 13 - 8 = □ sans mini-cubes, et 11 - 5 = □ avec mini-cubes. La difficulté pourrait provenir de l'ordre de grandeur des nombres dans l'équation (13 > 11); qu'arriverait-il si on inversait? Présenter 11 - 5 = □ sans mini-cubes et 13 - 8 = □ avec mini-cubes. L'effet de l'usage de matériel serait peut-être nul. Ceci démontrerait que le facteur grandeur est significatif;

- de plus, sans mini-cubes, les sujets doivent procéder mentalement, ou, comme ce fut le cas, se représenter mentalement 13 pour compter sur leurs doigts. C'est sans doute là un facteur important à considérer. Les sujets ne sont pas portés, dans l'ensemble, à faire des opérations intellectuelles telles: $13 - 8 \longleftrightarrow 13 - 3 - 5$ ou $13 - 8 \longleftrightarrow 13 - 10 + 2$, ...

Les résultats obtenus au problème a + x = b sans mini-cubes et avec mini-cubes semblent montrer que le comptage effectif des glands (représentés par des cubes) joue un rôle important pour ce problème. On avait d'ailleurs observé auparavant (chap IV, para. 4.2) que la présence de la totalité avait nui aux sujets, dans une certaine mesure. Mais cette totalité ne pouvait être comptée que de la vue, et non effectivement comme ce fut le cas ici. On constate en outre que ce problème n'est pas mieux réussi lorsque la totalité

est présente, avec usage de mini-cubes (f_c = 53) que lorsque la totalité est absente sans usage de mini-cubes (tableau 8: f_a = 56).

Finalement, dans tous les autres cas (équations ou problèmes), l'usage de mini-cubes pour compter n'affecte pas d'une façon significative les fréquences de réussite. En particulier, l'usage de mini-cubes ne semble pas affecter les fréquences de réussite des problèmes pour lesquels la totalité est absente, ou rendue absente (concret limité et concret modifié). Ainsi, cet usage n'affecte pas significativement le problème a - b = x (concret limité) alors qu'il affecte l'équation de forme a - b = x.

On pourrait expliquer ces résultats pour les problèmes par le fait que la représentation est au service de la pensée du sujet. C'est par la pensée seulement qu'il peut se représenter un problème et le résoudre. Le facteur principal pouvant expliquer une variation dans les fréquences semble être la nature même du problème. L'usage de matériel pour aider les sujets à représenter le problème donné ne semble pas être un facteur affectant significativement leur réussite.

4.5 Résultats obtenus en regard de la troisième hypothèse:

Selon cette troisième hypothèse, la fréquence de réussite des sujets aux problèmes serait plus grande que la fréquence de réussite des sujets aux équations correspondantes. Cette hypothèse devrait se vérifier dans les cas où les sujets utilisent ou non des mini-cubes.

Pour que les résultats soient comparables, il convient d'utiliser le cas des équations où un des nombres impliqué se situe entre dix et seize. Ce fut le cas pour les problèmes correspondants posés aux sujets. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux suivants.

Tableau 17: Fréquence de réussite des sujets aux équations et aux problèmes (sans mini-cubes). N = 74.

#	FORMES	EQUATIONS	PROBLEMES	
			CONCRET LIMITE ET CONCRET	CONCRET MODIFIE
		f	f	f
1	a - x = b	46	52	
2	a - b = x	43	48	
3	a + b = x	56	58	60
4	a + x = b	50	37	56
5	x - a = b	23	54	48
6	x + a = b	45	55	31

Tableau 18: Fréquence de réussite des sujets aux équations et aux problèmes (avec mini-cubes) N = 74

#	FORMES	EQUATIONS	PROBLEMES	
			CONCRET LIMITE ET CONCRET	CONCRET MODIFIE
			f_c	f_c
1	a - x = b	54	55	
2	a - b = x	60	57	
3	a + b = x	57	66	61
4	a + x = b	57	53	51
5	x - a = b	33	54	49
6	x + a = b	53	43	34

4.6 Interprétation des résultats en regard de la troisième hypothèse:

Les tableaux 19 et 20 donnent la valeur de chi deux calculée à partir des fréquences obtenues aux équations ($f_{éq}$) et aux problèmes correspondants (f_{prob}).

Tableau 19 : Valeur de chi deux calculée pour éprouver l'hypothèse de fréquences égales ($f_{éq} = f_{prob}$), sans mini-cubes.

#	FORMES	$f_{prob} - f_{éq}$ Concret limité et concret	Valeur de chi deux	$f_{prob} - f_{éq}$ Concret modifié	Valeur de chi deux
1	a - x = b	+ 6	0,37		
2	a - b = x	+ 5	0,27		
3	a + b = x	+ 2	0,04	+ 4	0,14
4	a + x = b	- 13	1,94	+ 6	0,34
5	x - a = b	+ 31	12,48	+ 25	8,8
6	x + a = b	+ 10	1,00	- 14	2,58

Tableau 20 : Valeur de chi deux calculée pour éprouver l'hypothèse de fréquences égales ($f_{éq} = f_{prob}$), avec mini-cubes.

#	FORMES	$f_{prob} - f_{éq}$ Concret limité et concret	Valeur de chi deux	$f_{prob} - f_{éq}$ Concret modifié	Valeur de chi deux
1	a - x = b	+ 1	0,01		
2	a - b = x	- 3	0,08		
3	a + b = x	+ 9	0,66	+ 4	0,14
4	a + x = b	- 4	0,15	- 6	0,33
5	x - a = b	+ 21	5,07	+ 16	3,12
6	x + a = b	- 10	1,00	- 19	4,15

Les résultats obtenus tendent à montrer qu'il n'y a pas de différence significative pour les formes 1 à 4, entre $f_{éq}$ et f_{prob}. Le niveau de probabilité acceptable est de 5%. Cette dernière observation est valable dans le cas où les sujets font usage ou non de mini-cubes. Les formes 5 (x - a = b) et 6 (x + a = b) font cependant exception.

Ainsi, les problèmes de forme 5 (types concret ou concret modifié) sont mieux réussis que l'équation x - a = b correspondante, d'une façon significative. Les valeurs de chi deux obtenues sont significatives à un niveau de probabilité inférieur à 5%. Ces résultats sont valables lorsque les sujets font usage ou non de mini-cubes.

D'autre part, et contrairement à l'hypothèse, le problème de forme 6, de type concret modifié, est moins réussi que l'équation x + a = b correspondante. Cette observation est significative à un niveau de probabilité inférieur à 5% lorsque les sujets font usage de mini-cubes. Comment expliquer cela? D'une part, l'effet de l'usage des mini-cubes sur la fréquence de succès des sujets est dans l'ensemble plus grande aux équations qu'aux problèmes, où l'influence est nulle (cf. para 4.4). D'autre part, l'absence de la totalité, pour la forme 6, a une influence significativement négative sur la fréquence de réussite des sujets pour ce problème (cf. para. 4.2); pour l'équation correspondante cependant, la totalité est disponible par écrit pour le sujet (cf. b dans x + a = b). Ces deux facteurs combinés (mini-cubes et absence de la totalité) peuvent donc expliquer ce résultat pour le cas de la forme 6.

Abstraction faite de ce cas particulier (forme 6), le problème est soit significativement mieux réussi (forme 5) ou le problème est ni plus, ni moins bien réussi que l'équation correspondante, dans les autres cas (formes 1 à 4).

4.7 Quelques observations didactiques:

Les sujets peuvent donc mieux résoudre, la plupart du temps, ces types de problèmes, sans faire appel à ce mode particulier de représentation qu'est l'équation. En supposant, au mieux, que les sujets établissent un lien entre problème et équation, le problème serait alors moins bien résolu à l'aide de l'équation, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent. D'ailleurs, j'avais constaté (chap III) lors d'entrevues individuelles que les sujets ne faisaient pas de lien entre le problème et l'équation qui le représente. Ces mêmes sujets faisaient très rarement appel aux opérations arithmétiques d'addition ou de soustraction. Le plus souvent, des procédés de comptage, de comptage à rebours, de double comptage (mentalement ou à l'aide des doigts comme support concret) étaient utilisés.

5. Relance de l'expérimentation au sujet de la première hypothèse dans deux classes de deuxième année:

Une analyse sommaire des résultats obtenus à l'égard de la première hypothèse avait été faite aussitôt après l'expérimentation. Cet examen m'avait alors convaincu que l'hypothèse n'était pas corroborée par les résultats. Avant même de faire une analyse systématique des résultats par un traitement statistique, j'entrepris une expérimentation au début de l'année suivante dans deux classes de deuxième année.

Cette expérimentation se basait sur l'élément suivant. A l'examen des réponses, j'avais observé que certaines de celles-ci (dans le cas des problèmes concrets ou concrets modifiés) provenaient de nombres d'une séquence précédente de l'histoire. C'est ainsi que plusieurs sujets répondaient, par exemple, par le dernier nombre de noix comptées (à la vue) à la question: «Combien y avait-il de noix juste avant que...».

J'entrepris donc cette expérimentation en voulant éliminer cette méprise de la part des sujets. Je décidai donc d'utiliser une période d'objectivation après chacune des réponses des sujets. Cela permettait de séparer dans le temps, et dans l'événement (l'histoire), les diverses séquences. Si cette modification produisait un changement dans les fréquences (f_a et f_p), ce dernier facteur pourrait entrer en considération.

5.1 Le modèle d'expérimentation:

L'expérimentation fut réalisée dans deux classes de deuxième année de la même école, entre le 20 octobre et le 31 octovre 1983. La même procédure que celle déjà expliquée précédemment (paragraphe 3.2) fut utilisée, avec un changement cependant. Cette fois, entre chacune des questions, je faisais une courte période d'objectivation (2-3 minutes) avec les sujets: Je demandais à quelques sujets pris au hasard, ce qu'ils avaient écrit comme réponse, et comment ils étaient arrivés à cette réponse. Cela permettait d'entrecouper les différentes séquences de l'histoire et obligeait les sujets à se référer à une séquence donnée de l'histoire. De plus, cela me permettait de recueillir des renseignements sur les procédés utilisés par les enfants pour arriver à leur solution.

Dans une de ces classes (A_1), j'ai utilisé la procédure utilisée à la séance 1 (cf. tableau 7, para. 3.2). Dans une autre classe (A_2), j'ai utilisé les deux premières questions de la procédure utilisée à la séance 3, et la séance 4 au complet. Le tableau suivant indique les formes de problèmes expérimentés dans chacune des classes A_1 et A_2.

Tableau 21: Formes et types de problèmes expérimentés dans les 2 classes

#	FORMES	TYPE DE PROBLEMES			
		TOTALITE ABSENTE	CLASSE	TOTALITE PRESENTE	CLASSE
1	a - x = b	Concret limité	A_1	Concret limité modifié	A_2
2	a - b = x	Concret limité	A_1	Concret limité modifié	A_2
3	a + b = x	Concret modifié	A_2	Concret	A_1
4	a + x = b	Concret modifié	A_2	Concret	A_1
5	x - a = b	Concret modifié	A_2	Concret	A_1
6	x + a = b	Concret modifié	A_2	Concret	A_1

Certains sujets de ces deux classes étaient présents lors de l'expérimentation dans leur classe de première année. Ces sujets participèrent quand même à l'expérimentation (5 sujets pour la classe A_1 et 3 pour la classe A_2) mais furent éliminés des données recueillies. De plus, un certain nombre d'autres sujets furent éliminés et les données recueillies relativement à certaines questions rejetées. Ce fut le cas des sujets pour lesquels la réponse donnée était raturée ou effacée et dont la lecture pouvait prêter à l'interprétation. Cela était vraisemblablement dû à la période d'objectivation entre chacune des questions. Le nombre de sujets était respectivement de 16 et de 18 pour les classes A_1 et A_2 après avoir éliminé les sujets ayant déjà participé à l'expérimentation en première année. En éliminant les cas douteux, ces nombres diminuaient légèrement.

5.2 Les résultats obtenus:

Le tableau suivant présente les données recueillies dans les deux classes. On y observe la fréquence de succès obtenue lorsque la totalité est absente (f_a) et le nombre de sujets de l'échantillon (N_a); puis, la fréquence de succès obtenue lorsque la totalité est présente (f_p) et le nombre de sujets de l'échantillon (N_p). Pour une forme donnée de problème, la totalité était présente dans une classe, et absente dans l'autre classe.

Tableau 22: Fréquences de succès obtenues pour chacune des formes de problèmes lorsque la totalité est absente (f_a) et lorsque la totalité est présente (f_p) pour une classe donnée (A_1 ou A_2 entre parenthèses).

#	FORMES	f_a	N_a	f_p	N_p
1	a - x = b	10	16 (A_1)	13	16 (A_2)
2	a - b = x	8	15 (A_1)	14	17 (A_2)
3	a + b = x	17	18 (A_2)	14	16 (A_1)
4	a + x = b	10	16 (A_2)	8	16 (A_1)
5	x - a = b	16	17 (A_2)	10	16 (A_1)
6	x + a = b	3	17 (A_2)	13	15 (A_1)

5.3 Interprétation des résultats en regard de la première hypothèse:

On se rappelle que la première hypothèse stipulait que la présence de la totalité aurait un effet significatif sur les fréquences de réussite.

Pour revérifier cette hypothèse, à l'aide des données recueillies, j'ai utilisé le test t de signification aux conditions particulières de ces petits échantillons. Ces deux échantillons sont indépendants (2 classes différentes). La technique appliquée permet d'obtenir la signification d'une différence entre des proportions indépendantes. Ici les proportions sont la proportion des sujets ayant réussi dans chacun des groupes (A_1 et A_2) pour chacune des formes de problèmes (Dayhaw, 1966). Le tableau suivant présente le calcul du rapport «t». Voici la signification des symboles de ce tableau:

p_a : proportion de sujets ayant réussi lorsque la totalité est absente

p_p : proportion de sujets ayant réussi lorsque la totalité est présente

$p_a : \frac{f_a}{N_a}$; $p_p = \frac{f_p}{N_p}$

$p_{é.c}$: proportion des échantillons combinés = $\frac{N_a p_a + N_p p_p}{N_a + N_p}$

σ_{D_p} : erreur-type de la différence de proportions = $\sqrt{p_{é.c}\ q_{é.c}\left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_p}\right)}$

où $q_{é.c} = 1 - p_{é.c}$

D : différence des proportions = $p_p - p_a$

rapport $t = \frac{D}{\sigma_{D_p}}$

Tableau 23: Valeurs du rapport t calculé pour chacune des formes de problèmes en regard du rapport t significatif au niveau de 5%

#	Formes	P_a	P_p	$P_{é.c}$	D_p	D	Rapport t	Rapport significatif - niveau 5%
1	a - x = b	0,63	0,81	0,72	0,1587	$^{+}$0,18	$^{+}$1,134	2,036
2	a - b = x	0,53	0,82	0,68	0,1652	$^{+}$0,29	$^{+}$1,755	2,036
3	a + b = x	0,94	0,88	0,91	0,0984	$^{-}$0,06	$^{-}$0,610	2,031
4	a + x = b	0,63	0,50	0,57	0,1749	$^{-}$0,13	$^{-}$0,743	2,036
5	x - a = b	0,94	0,63	0,79	0,1418	$^{-}$0,31	$^{-}$2,186	2,033
6	x + a = b	0,18	0,87	0,50	0,1772	$^{+}$0,69	$^{+}$3,893	2,036

Dans le tableau 24, sont synthétisées les tendances obtenues en observant les tableaux 10(para. 4.2) et 23 (para. 5.3). On y présente «l'effet» de la présence de la totalité à la vue des sujets au cours de ces deux expériences. Cet effet est représenté par les changements significatifs ou non produits sur les fréquences. Ce sont les valeurs des statistiques (χ^2 et t) qui ont permis de cerner cet effet. Le signe «+» indique que la présence de la totalité induit plus de succès chez les sujets; le signe «-» indique l'effet contraire.

Tableau 24: Effet de la présence de la totalité - Expériences 1 et 2

#	FORMES	EFFET OBTENU	
		EXPERIENCE 1	EXPERIENCE 2
1	a - x = b	non significatif +	non significatif +
2	a - b = x	non significatif +	non significatif +
3	a + b = x	non significatif -	non significatif -
4	a + x = b	significatif -	non significatif -
5	x - a = b	non significatif +	significatif -
6	x + a = b	significatif +	significatif +

On observe que les mêmes «effets» sont conservés pour les formes 1, 2, 3, 4 et 6, et que la tendance est à l'effet positif pour les formes 1, 2 et 6, d'une façon significative (forme 6) ou non (formes 1, 2). La tendance est assez forte (quoique la différence non significative) pour les formes 1 et 2 si on tient compte du rapport t obtenu (cf. tableau 23) et de la tendance maintenue dans les deux expériences. Pour la forme 4, les différences de fréquence sont maintenant non significatives. Cette fois, l'analyse des réponses montre que les erreurs dues à une mauvaise interprétation de la question sont en proportion beaucoup plus faible qu'à l'expérienc 1. (Chap IV, para. 4.2) De plus, la plupart des erreurs sont dues au comptage, surtout lorsque la totalité est absente.

La forme 5 nous présente deux renversements. Tout d'abord, la tendance est renversée (+ ⟶ -); ensuite, la tendance négative est significative, alors que la tendance positive était non significative. Un autre facteur que celui modifié au cours de la deuxième expérience semble donc avoir joué.

L'analyse des réponses de la 2è expérience montre qu'il ne s'agit pas d'erreur de comptage, mais d'erreur due soit à la non compréhension de la question telle que formulée, soit à la nature même du problème de cette forme.

En somme, les résultats obtenus semblent au moins démontrer une tendance pour les formes 1, 2 et 6, où la présence de la totalité a un effet positif. Cet effet est significatif pour la forme 6. Par ailleurs, il semble que pour les formes 3, 4 et 5, il soit possible que la totalité ait un effet nul (3 et 4), ou négatif d'une façon significative (5). On pourrait peut-être expliquer ce dernier résultat pour les formes 3, 4 et 5 par la complexité plus grande des problèmes (au niveau sémantique du moins), lorsque la totalité était présente. De plus, à ce moment, les sujets étaient situés trop loin du montage, ce qui les empêchait de compter effectivement les objets «présents». La combinaison de ces deux facteurs constitue un obstacle qui n'existait pas lors des entrevues cliniques (cf. chap III).

Des rencontres individuelles avec les sujets qui ont donné des réponses erronées apporteraient sans doute un éclairage sur ce dernier point. Cela me permettrait de présenter la même expérience et de mieux connaître les réactions de ces sujets. Il conviendrait alors de s'assurer que les sujets comprennent la consigne; ces derniers pourraient aussi compter effectivement les noix lorsque la totalité est présente. Cette expérience pourrait apporter des résultats plus concluants. Les statistiques ne peuvent, à elle seule, rendre compte du phénomène. Il est nécessaire d'adjoindre à ce traitement l'entrevue individuelle.

CHAPITRE V

1. Introduction

En ce dernier chapitre, je ferai un bilan des résultats obtenus. Je tenterai alors de synthétiser les données recueillies et de relier entre eux les faits observés. J'y ajouterai des commentaires recueillis auprès des enfants et des enseignants ayant participé à cette recherche. Ces commentaires enrichiront les données obtenues. Cette objectivation permettra d'entrevoir et de formuler des propositions didactiques pouvant guider les enseignants, l'objet de ce travail depuis le tout début.

2. Synthèse des résultats obtenus

Les enfants et les enseignants ont commenté leur expérience au cours de cette recherche. Ces commentaires furent recueillis au cours de périodes d'objectivation prévues pendant les séances d'expérimentation. Je traiterai, en parallèle, de l'ensemble des données recueillies au cours de cette recherche. Celles-ci concerneront deux domaines: la résolution de problème, et le rôle des supports donnés à la représentation (cf. les mini-cubes).

2.1 La résolution des problèmes présentés:

D'après le chapitre précédent, la présence de la totalité semble avoir été un facteur non négligeable. Le fait que les noix, par exemple, étaient

toutes présentes, a facilité le recours à des opérations pour résoudre les formes 1, 2 et 6. L'absence des noix obligeait les sujets à opérer mentalement, et rendait plus difficile la résolution des problèmes de ces formes. Cependant, la tendance observée pour ces dernières formes est nulle (forme 3 et 4) ou significativement négative (forme 5). Même si on ne peut rejeter l'hypothèse de départ en bloc, comment expliquer ce dernier phénomène? Certains facteurs explicatifs ont déjà été énoncés: les sujets pourraient ne pas avoir compris la consigne, ou encore, les sujets pourraient avoir fait des erreurs de comptage, car le comptage des noix se faisait à la vue seulement, et non effectivement.

Certains commentaires d'enfants ou d'enseignants font apparaître un autre facteur explicatif. Les formes 3, 4, 5 et 6 (totalité absente) ont été éprouvées à l'aide de l'histoire des biscuits. Les formes (4 à 6) lorsque la totalité est présente, ont été éprouvées à l'aide de l'histoire de l'écureuil. Or, plusieurs enfants disent avoir préféré l'histoire des biscuits; il semble qu'ils l'aient trouvée plus facile et donnent des raisons: «... l'histoire de la poupée (cf. les biscuits) était plus facile que celle de l'écureuil ... dans l'histoire de l'écureuil il y a beaucoup de chiffres». Plusieurs enfants préfèrent l'histoire des biscuits: «... parce que c'était comique ... court ... le fun». «C'était plus simple, parce que c'était moins long». D'autre part, une enseignante ayant participé à la recherche se demandait, à l'issue des expérimentations: «Est-ce que ça ne les mêlait pas les enfants quand il il y avait plusieurs chiffres dans l'histoire?»

D'après ces commentaires, le fait que l'histoire des biscuits était «plus facile» a pu donner de meilleurs résultats pour les formes 3, 4 et 5. Cela en dépit du fait que la totalité était absente. D'autre part, lorsque la totalité était présente (histoire de l'écureuil), les sujets faisaient face à des données plus abondantes ou superflues (chiffres, événements, etc ...). Ce qui pourrait expliquer ce fait que, même en présence de la totalité, on a observé des fréquences de réussite inférieures aux fréquences obtenues lorsque la totalité était absente.

Par ailleurs, des données de cette expérience tendent à confirmer l'intérêt des enfants pour de tels problèmes. Les commentaires suivants le démontrent, à propos des histoires: «j'ai tout aimé ... c'était facile» « ... c'était bien l'fun!» «Les deux premières fois, c'était plat (cf. les équations) ... j'aimais mieux les histoires!»

Ces commentaires étaient très fréquents, surtout les deux premiers. D'ailleurs, l'attitude intéressée et l'implication des enfants, même en cette période de l'année (juin, et il faisait chaud dans les classes!) montrent que ces situations ont suscité un intérêt marqué.

D'autre part, certains commentaires d'enseignantes me portent à croire que de telles situations étaient peu exploitées en classe:
«je me suis rendue compte que j'en faisais pas assez des choses comme ça» (cf. histoire de l'écureuil). «...j'ai aimé ça (les histoires) ça nous montre qu'il y a des choses intéressantes à faire avec les équations ... avec du matériel simple».

Le temps passé à l'enseignement semble donc avoir été utilisé plutôt à l'accumulation ou à l'assimilation de symboles arithmétiques (équations) plutôt qu'à des problèmes significatifs. Le recours à une représentation quelconque aiderait-il les sujets à mieux résoudre les problèmes ou les équations présentés? A cet égard, la recherche a mis en lumière certains faits d'observation.

2.2 La représentation: le rôle des mini-cubes et des équations

Nous avons observé que l'usage de mini-cubes n'affecte pas la fréquence de réussite, ni aux problèmes, ni aux équations. Cela d'une façon significative dans tous les cas, sauf pour deux exceptions: l'équation $a - b = x$ et le problème $a + x = b$ (concret).

De plus, les équations ne sont pas mieux ni moins bien réussies que les problèmes. Cela, en dépit du fait que l'investissement au niveau de l'enseignement ait porté surtout sur les équations ou les symboles.

Les symboles présentés sous formes d'équation, comme la représentation des noix ou des biscuits par des mini-cubes n'aideraient donc pas les enfants à résoudre de tels problèmes. On se rappelle d'ailleurs les difficultés observées chez les enfants à propos du symbolisme (cf. Chapitre II). De plus, les mini-cubes n'aident pas d'une façon significative les enfants à résoudre les équations présentées hors contexte.

Certains commentaires d'enfants sont significatifs à cet égard: ils semblent en effet conscients que les cubes ne les aident pas. Il semble même exister une certaine résistance (due à quoi?) à compter sur leurs doigts ou avec des cubes:

«... on peut pas compter sur nos doigts, l'an prochain, en deuxième, on est pas pour compter sur nos doigts!»

Plusieurs enfants trouvent que c'est plus facile sans les cubes; la plupart des commentaires ressemblent à ceux-ci:

«... c'est plus difficile en prenant les blocs»
«... on peut pas penser quand on a les blocs»
«j'aime mieux pas de blocs ... je sais pas pourquoi»
«c'est pas mal pareil avec les cubes»
«j'ai trouvé ça plus difficile avec les cubes, j'aime mieux compter sur mes doigts»

Quelques enfants trouvent que les cubes les aident:

«c'était plus facile avec les cubes, on pouvait les prendre pour compter»
«ça m'aidait, je pouvais me souvenir des chiffres avec des cubes»

D'après les procédés utilisés par les enfants rencontrés en entrevue individuelle, il semble que la représentation privilégiée était le comptage (un, deux, ...), le double comptage, le comptage à rebours.

Quelquefois seulement ils utilisaient des opérations arithmétiques, mais ce furent des exceptions (cf. chap. III).

Le peu d'occasion fournie aux enfants pour résoudre des problèmes où le rôle de la représentation (évocation en pensée d'actions concrètes) est primordiale (cf. problèmes où la totalité est absente) pourrait expliquer un sous-développement possible des enfants. Ce sous-développement s'étant fait au profit de l'apprentissage d'un symbolisme arithmétique dénué de sens, par exemple, celui d'équations présentées hors contexte.

Il semble ainsi que ce soit d'abord par l'action des enfants, leur implication intellectuelle à l'égard des problèmes qui leur sont présentés que réside la clé de l'apprentissage de la représentation. En effet, c'est par «l'intériorisation progressive des actions et du réel» que les enfants en viennent à être capable d'évoquer, en l'absence des objets, (cf. problèmes où la totalité est absente) «les propriétés pertinentes pour l'action» (Vergnaud, 1981:9).

Cette évocation pourrait ainsi se faire à l'aide des symboles utilisés en arithmétique (nombres oraux ou écrits, signes d'opérations +,-) et rendus signifiants en les reliant à des actions concrètes (compter, ajouter, enlever, réunir,...).

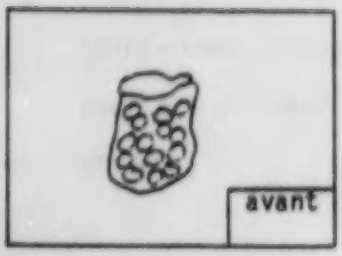
3. Quelques propositions didactiques:

Cette synthèse me permet d'entrevoir certaines propositions didactiques susceptibles de résoudre le problème initial évoqué par les enseignantes de première année (Chapitre I, para. 2.3). Ces propositions sont cependant énoncées comme des hypothèses didactiques. A leur tour, ces hypothèses pourraient être éprouvées au cours de recherches auprès des enfants.

P_1: les enfants pourraient avantageusement vivre des situations concrètes semblables à celles vécues pendant l'expérimentation. Cependant, ils pourraient alors jouer un rôle actif dans ces situations, et exécuter eux-mêmes les opérations pour résoudre les problèmes;

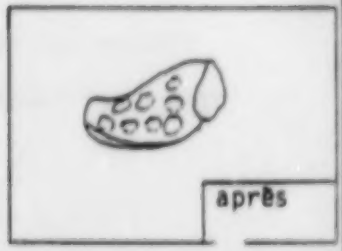
P_2: le symbolisme ne devrait être introduit que pour aider les enfants à évoquer les objets absents, ou les actions posées pour résoudre les problèmes. Ce symbolisme (+, -, =) ne devrait être introduit que lorsqu'il est jugé utile par les enfants pour évoquer les objets ou les actions sur ces objets;

P_3: un symbolisme plus proche de l'action effective pourrait être celui emprunté à la notion d'opérateur. C'est à dire que les actions et les états successifs, dans la situation, seraient mis en évidence. (Hamel et Lunkenbein, 1974);



(un sac transparent avec 14 noix)

(un écureuil vient chercher des noix)



Que s'est-il passé? Combien l'écureuil a-t-il pris de noix?

Un symbolisme quelconque ne devrait apparaître que lorsque les enfants sont assez familiers avec des problèmes concrets. Ainsi, des problèmes peuvent leur être donnés par écrit, de la façon suivante, en utilisant un code.

avant	action	après
15	- x	8
3	+ 7	x
x	+ 3	10

code:

+ veut dire ajouter

- veut dire enlever

x veut dire un nombre à chercher.

P_4: l'usage de matériel pour résoudre les problèmes devrait être facultatif (mini-cubes, bâtonnets, jetons, ...) et mis à la disposition des enfants pour les utiliser au moment où ils le jugent utile pour évoquer les objets absents;

P_5: le comptage sur les doigts devrait être admis, même encouragé dans certains cas; on devrait aussi favoriser le comptage «dans la tête», sans faire usage de matériel à certains moments;

P_6: des énigmes pourraient être proposées aux enfants où sont impliquées des opérations diverses (partage égal, relations numériques, comptages, etc...). La solution de ces énigmes peut développer chez les enfants diverses opérations mentales.

P_7: l'observation de régularités dans des suites de nombres ou d'opérations sur les nombres peut faciliter la construction du nombre:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

1 + 1	1
2 + 1	1 + 1
3 + 1	1 + 1 + 1
4 + 1	1 + 1 + 1 + 1
5 + 1	1 + 1 + 1 + 1 + 1
6 + 1	..
7 + 1	..
..	
..	

Qu'observes-tu?

CONCLUSION

Cette recherche voulait cerner un problème relié à des difficultés d'enfants de première année de la commission scolaire où j'exerce les fonctions de conseiller pédagogique. Le problème initial consistait en la difficulté, pour certains enfants, à traduire une situation d'addition ou de soustraction à l'aide de symboles, et à résoudre des équations faisant appel aux symboles arithmétiques usuels.

Des entrevues individuelles furent réalisées auprès d'enfants en difficulté relativement au problème identifié. Les observations recueillies à ce moment m'amenèrent à formuler trois hypothèses. Celles-ci concernaient six formes différentes de problèmes d'addition et de soustraction et leurs équations correspondantes. Ces hypothèses furent ensuite testées auprès de groupes d'enfants de première et de deuxième année.

La première hypothèse portait sur l'influence du facteur absence ou présence de la totalité relativement à la réussite des sujets de l'échantillon pour les six formes de problèmes. Ce facteur avait semblé significatif pour des sujets rencontrés individuellement. Ainsi, lorsque la totalité était présente (ou rendue présente), ces sujets rencontrés individuellement réussissaient; mais lorsque la totalité était absente (ou rendue absente), quelques-uns de ces sujets ne réussissaient pas certaines formes de problèmes.

Les données recueillies auprès de l'échantillon d'enfants de première et de deuxième année ne confirment qu'en partie cette hypothèse. La présence de la totalité induit une fréquence de réussite plus grande que l'absence de la totalité pour les formes 1, 2 et 6. La recherche n'apporte pas de résultat concluant pour les formes 3, 4 et 5: ce résultat fut expliqué par la complexité plus grande (au point de vue sémantique) des problèmes, lorsque la totalité était présente, et par l'impossibilité pour les sujets de compter effectivement les objets «présents».

Il semble que la conduite des sujets qui ne réussissent pas les problèmes en l'absence de la totalité soit caractéristique du stade de la pensée intuitive décrite par Piaget. Les sujets, à ce stade de leur développement, s'attachent principalement aux états de l'objet; ces sujets ne peuvent s'adapter «aux modifications ou transformations reliant entre eux des états successifs» (Legendre-Bergeron, 1980: 196). Les sujets pour lesquels l'absence de la totalité ne constitue pas un obstacle seraient capables d'agir symboliquement (en pensée) sur des états successifs. Grâce à la représentation, un tel sujet «intériorise ses actions et les traduit symboliquement sous forme d'opérations logiques (...). Il saura, par exemple, que tel résultat est logiquement impossible, sans avoir besoin d'en faire l'expérience» (Legendre-Bergeron, 1980: 12). Cette dernière conduite est caractéristique du stade des opérations concrètes. Cette conduite a pu possiblement se retrouver chez un certain nombre de sujets de l'échantillon. Cela pourrait peut-être expliquer les différences non significatives observées entre les fréquences lorsque la totalité est présente et absente.

La seconde hypothèse stipulait que la fréquence de réussite des sujets, aux problèmes et aux équations, serait plus grande lorsque ces derniers utilisent des mini-cubes. Dans tous les cas, pour les équations et les problèmes (sauf pour l'équation a - b = x et le problème a + x = b concret), l'usage de mini-cubes n'affecte pas significativement la fréquence de réussite. Pour les équations, on a observé un léger effet positif (cependant non significatif) de l'usage de mini-cubes lorsque les nombres impliqués dans l'équation se situent entre dix et seize. Cet effet est cependant nul lorsque les nombres sont inférieurs à dix. Et pour tous les problèmes, mise à part la forme a + x = b (concret), l'usage de mini-cubes n'a aucun effet significatif, même pour les problèmes où la totalité est absente(ou rendue absente), sur la fréquence de réussite. L'utilisation de matériel ne semble utile que si les sujets peuvent eux-mêmes structurer adéquatement les données du problème.

Selon la troisième hypothèse, la fréquence de réussite des sujets serait plus grande que la fréquence de réussite aux équations correspondantes. La recherche montre qu'il n'existe de différence significative que pour les formes x - a = b et x + a = b. Les sujets de l'échantillon ont mieux réussi l'équation de forme x + a = b que le problème correspondant; par ailleurs, ils ont mieux réussi le problème de forme x - a = b que l'équation correspondante. Les résultats obtenus ne confirment donc pas cette hypothèse. Cela pourrait s'expliquer par le fait que résoudre une équation peut se faire sans véritable compréhension, par un procédé purement mécanique; résoudre un problème suppose par contre une compréhension préalable de la situation. Le cas de la réussite plus grande du problème de forme x - a = b pourrait peut-être s'expliquer par le fait que le procédé mécanique pour trouver l'inconnue x n'est pas simple (additionner a et b alors qu'on est en présence de la soustraction x - a). Une seconde explication des résultats obtenus en regard de cette troisième hypothèse pourrait tenir au fait que le temps consacré à l'apprentissage des symboles et équations

arithmétiques a pu être plus important que celui consacré à la résolution de problèmes significatifs concrets par les enfants (chap. V, para. 2.1).

Deux problèmes se dégagent suite à la discussion de ces trois hypothèses. Ce sont les problèmes de l'intériorisation des actions effectives, et de la symbolisation arithmétique des opérations. Interprétons les résultats précédents à la lumière de ces deux aspects didactiques.

En premier lieu, les réactions des enfants face aux problèmes présentés, notamment lorsque la totalité est absente montrent que des élèves n'ont pas intériorisé les opérations. Le «passage entre l'exécution effective («matérielle», «concrète») des actions à leur exécution intérieure» (Aebli, 1966: 104) n'a pas été effectué par certains élèves. Les entrevues individuelles montrent que cela pouvait se manifester par une évaluation approximative de la donnée inconnue d'une situation d'addition ou de soustraction.

En second lieu, la réaction des enfants qui éprouvent des difficultés face au symbolisme est caractéristique des élèves qui ont acquis des «habitudes relatives au maniement des symboles» (Aebli, 1966: 52). Le procédé pour résoudre les équations est un procédé appris. Correctement appris, il conduit à une solution juste de l'équation. Mal appris, le symbolisme représente un obstacle plutôt qu'un instrument au service de la pensée arithmétique de l'élève. Les entrevues individuelles ont permis d'identifier certaines fausses interprétations attribuées au symbolisme arithmétique. Même les sujets qui ont appris à résoudre l'équation présentée n'établissent pas nécessairement le lien entre l'équation et la situation correspondante.

En rapport à ces deux thèmes principaux de l'interprétation des résultats, deux questions se posent. Celles-ci nous ramènent au problème didactique initial qui a motivé cette recherche:

- Comment aider les enfants de 6 à 8 ans à intérioriser les opérations d'addition et de soustraction?
- Comment faire en sorte que le «symbolisme-obstacle» devienne un «symbolisme-aide» au processus d'intériorisation de l'élève?

Les propositions didactiques énoncés au chapitre V se veulent répondre au moins partiellement à ces deux questions. Pour mettre en pratique ces propositions, trois principes généraux énoncés par Aebli (1966) peuvent inspirer notre démarche:

- le principe de construction;
- le principe d'intériorisation;
- le principe opératoire.

En se basant sur le principe de construction, l'enseignement «doit viser à la construction des opérations par l'élève» (Aebli, 1966: 13). Un problème ou un projet sert de cadre à la recherche personnelle de l'élève. Pendant une telle activité intellectuelle, les nouvelles notions ou opérations peuvent se construire.

Le principe d'intériorisation désigne le passage de l'exécution effective des actions (ajouter, enlever, réunir, compter,...) à leur exécution intérieure. L'action de l'élève est alors transformée progressivement en représentation,

c'est-à-dire une opération de la pensée, une image mentale ou anticipation intérieure d'actions pratiques. L'annexe 20 illustre ce processus d'intériorisation.

A la phase de recherche où les élèves ont construit une opération succède l'exercice opératoire (Aebli, 1966) sur lequel se fonde le principe opératoire. Selon ce principe, l'opération qui vient d'être introduite est repensée «sous une forme encore significative et ne permettant à aucun élève de se tirer d'affaire par un procédé mécanique» (Aebli, 1966:95). Chez certains élèves, la phase de recherche a pu aboutir naturellement à une opération réversible; chez d'autres par contre, l'inversion de l'opération requiert un apprentissage supplémentaire. Selon ce même principe, la recherche de diverses voies de solutions pour parvenir au résultat, est provoquée par l'enseignant. Le but de ces exercices opératoires est de prévenir la «formation d'habitudes rigides de pensée» (Aebli, 1966:96) et de favoriser ainsi le développement d'une opération comportant la réversibilité et l'associativité.

Une stratégie d'enseignement respectant ces trois principes généraux de didactique permettrait, sans doute, d'aider les élèves à intérioriser les opérations et à assimiler le langage des signes arithmétiques d'une façon naturelle. En continuité avec la présente recherche, la construction et l'expérimentation d'une telle stratégie d'enseignement serait fort utile. Cela pourrait faire l'objet d'une recherche de maîtrise d'enseignants(es) engagés (es) dans une pratique quotidienne.

Des questions et des pistes de recherche restent encore à explorer. Elles pourraient donner lieu à des recherches didactiques à l'intérieur de deux domaines principaux:

- des recherches sur l'intériorisation des opérations arithmétiques;
- des recherches sur le processus de symbolisation des mêmes opérations.

Voyons succintement quelques problématiques qui pourraient être cernées sur le <u>processus d'intériorisation:</u>

- Les résultats de cette recherche semblent montrer que l'absence de la totalité constitue un obstacle pour résoudre certaines formes de problèmes d'addition et de soustraction. En éliminant les causes pouvant biaiser les résultats obtenus (erreurs de comptage, mésinterprétation des consignes par les sujets, etc...) comfirmerait-on la première hypothèse? Quels sont les facteurs qui influencent la résolution des problèmes d'addition et de soustraction: expériences accumulées à l'égard de tels problèmes, maturation en terme d'années scolaires,...?

- L'utilisation de matériel (mini-cubes) ne fut d'aucune aide pour résoudre les problèmes et les équations présentées (équations où les nombres impliqués étaient inférieur à 10). Est-ce vrai pour tous les sujets? Y a-t-il un moment, au niveau de l'apprentissage, où le matériel pourrait faciliter la résolution de tels problèmes? Dans quelle mesure l'utilisation des doigts pour compter constitue-t-elle une aide pour résoudre ces problèmes?

- Les entrevues individuelles avec des enfants ont permis de rendre compte de processus de pensée dans des situations d'addition et de soustraction (chap. II, III): évaluation approximative, comptage et double comptage à l'aide des doigts, utilisation de calcul mental à l'aide d'opérations arithmétiques,... S'il existe une genèse de la construction des opérations arithmétiques, comment s'élabore-t-elle chez les enfants? Quelles sont les conduites propres à chacun des paliers?

Au sujet du processus de symbolisation, de nouvelles recherches pourraient également être entreprises.

- La recherche semble montrer que les sujets réussissent mieux les problèmes que les équations dans l'ensemble, si on ne tient pas compte de la forme (cf. annexe 21). De plus, des entrevues individuelles ont montré des erreurs d'interprétation du symbolisme propre aux équations. Le développement au niveau de la résolution de problèmes d'addition et de soustraction peut-il être accompagné d'un développement parallèle au niveau du symbolisme? Ou ce développement précède-t-il toujours celui du symbolisme d'une façon naturelle? En outre, quel symbolisme (équations ou autre) refléterait le mieux le développement génétique d'un enfant de première année? Et comment bien intégrer l'apprentissage du symbolisme à la résolution de problèmes d'addition et de soustraction ou à l'apprentissage en général chez les enfants du primaire?

De telles recherches auraient, sans doute, des implications importantes sur le contenu du programme de mathématique (gouvernement du Québec, 1980) et sur les chapitres 2 et 3 du guide pédagogique sur les nombres naturels (gouvernement du Québec, 1982). L'engagement concerté d'enseignants, de conseillers pédagogiques et de didacticiens dans des recherches de ce type permettrait sans doute de clarifier et régler bien des problèmes d'enseignement et d'apprentissage. Cela contribuerait à aider bon nombre d'enfants éprouvant les difficultés d'apprentissage que j'ai observées à l'occasion de cette recherche.

Au plan personnel enfin, une telle démarche m'a beaucoup appris. Elle fut, pour moi, l'occasion de développer des habiletés et des attitudes propres à la recherche, de m'initier à une démarche expérimentale pour explorer un problème didactique. Comme conseiller pédagogique, cette démarche expérimentale constitue déjà, en soi, un outil très précieux. Mais par sa nature et son objet, cette recherche constitue un apport important à l'exercice de ma fonction. Il m'a été possible d'explorer en profondeur certaines des questions qui préoccupent les enseignants (es), d'observer et de juger avec plus de discernement certaines méthodes ou programmes et enfin, d'établir des liens étroits avec des enseignantes et avec le vécu mathématique des enfants. Ces derniers liens sont, du reste, très précieux en tant que conseiller pédagogique puisque ce vécu ne se met pas facilement en modèle.

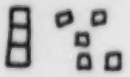
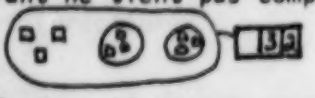
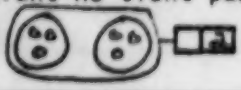
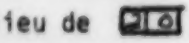
QUESTIONNAIRE

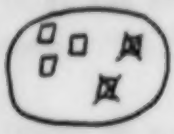
Les difficultés spécifiques d'apprentissage de l'enfant en mathématique, (apparaissant dans le tableau ci-dessous) ont été énoncées, lors d'une entrevue à ce sujet, avec quatre (4) enseignantes de première année de la Commission scolaire.

Difficultés spécifiques: Nous avons convenu d'appeler difficulté spécifique la situation d'apprentissage où il existe un obstacle pour certains enfants (ou plusieurs, selon le cas), à assimiler un concept mathématique. Cet obstacle est par la suite difficile à franchir par ces enfants.

CONSIGNE 1: Cocher dans la case appropriée, si la difficulté énoncée constitue pour toi une difficulté.

CATEGORIE DE DIFFICULTE	DIFFICULTES SPECIFIQUES	COCHER
NOMBRE	. comparaison de deux nombres: utilisation des symboles	
	. compter, dénombrer le nombre d'objets dans un ensemble	
	. construire un ensemble qui a "un élément de plus", "un élément de moins", "deux éléments de plus", etc ... qu'un ensemble donné	
	Autres (préciser):	

CATEGORIE DE DIFFICULTE	DIFFICULTES SPECIFIQUES	COCHER
NUMERATION	. regrouper des objets dans une base donnée Ex.: Avec huit blocs en <u>base trois</u>, l'enfant fait  : il dit qu'il manque un bloc ou va en chercher un autre pour "en avoir assez".	
	. transcrire en une base donnée un certain nombre d'objets (base dix ou autre que dix). - l'enfant ne tient pas compte des positions: Ex.:  : base trois - l'enfant ne tient pas compte de "zéro": Ex.:  au lieu de 	
	. mettre en ordre ou comparer des nombres Ex.: mettre en ordre: 46, 32, 59, 27 (base dix).	
	Autres (préciser):	
OPERATIONS (+, −)	. à partir d'un ensemble l'enfant a de la difficulté à résoudre l'équation 2 + □ = □ ; il peut écrire 2+[1]=[1]	
	. pour calculer 3+5 = ?, l'enfant "compte sur ses doigts".	
	. difficulté avec les symboles. L'enfant peut écrire 3+ = 5 ou 3 = + 5.	

CATEGORIE DE DIFFICULTE	DIFFICULTES SPECIFIQUES	COCHER
OPERATIONS (+ , −) (suite)	. à partir d'une situation de soustraction représentée par le diagramme  l'enfant peut écrire 2 - 3 = ... et "être mêlé". ou encore difficulté à résoudre 5 − 3 = □ ou 5 − □ = 2.	
	. l'enfant peut écrire: 9 − 4 = 13.	
	Autres (préciser):	

CONSIGNE 2: Ecrire dans la case appropriée ci-dessous, la catégorie de difficultés (NOMBRE, NUMERATION, OPERATIONS); de la catégorie de difficultés qui t'apparaît la plus importante à celle qui t'apparaît la mois importante.

↑ Inscrire ici la catégorie de difficultés la plus importante.

↑ Inscrire ici la catégorie de difficultés, la moins importante.

Merci de votre collaboration.

Annexe 2: lettre accompagnant le questionnaire présenté en annexe 1.

Services pédagogiques
Mathématique

Commission scolaire de Chavigny
Le 31 mars 1981

A : La direction de l'école et aux enseignants des classes de 1ère année.

Sujet: Difficultés d'apprentissage en mathématique, 1ère année.

Nous entreprenons actuellement une étude sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques pour l'enfant de première année, au niveau de la Commission scolaire. Le but de ce travail est 1) d'étudier, auprès des enfants, les causes, dans l'ordre du processus de la connaissance en mathématique, pouvant expliquer leurs difficultés, et 2) de mettre au point une approche pédagogique; celle-ci, une fois appliquée, serait susceptible d'aider les enfants dans leur apprentissage.

Pour ce faire, nous voulons d'abord identifier une difficulté "de taille", c'est-à-dire, une difficulté rencontrant l'unanimité (ou presque), chez les enseignants de première année. Le questionnaire ci-joint correspond à cette partie du travail. Afin de mener à bien cette opération, nous vous demandons de remplir ce questionnaire et de le placer dans l'enveloppe de retour.

Bien à vous,

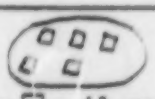
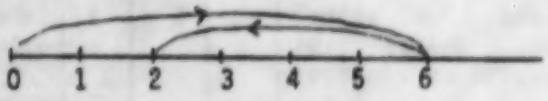
Normand Caron

NC/mbd

Normand Caron,
Conseiller pédagogique en mathématique

c.c.: enseignantes 1ère année

Annexe 3: analyse des réponses et commentaires sur les opérations arithmétiques.

	Groupement de difficultés énoncées (avec commentaire(s) d'enseignante(s)).	f[1]
1.	A partir d'une situation de soustraction représentée par ce diagramme l'enfant peut écrire 3 - 2 = ... et «être mêlé»; ou encore, difficulté à résoudre les équations impliquant la soustraction: telles 5 - 3 = □ 5 - □ = 2. Commentaire: «ce dernier point (5 - □ = 2) fait l'objet d'une plus grande difficulté» (1 enseignante)	7
2.	A partir d'un ensemble représenté par  l'enfant a de la difficulté à résoudre l'équation 2 + □ = □; il peut écrire 2 + 1 = 1	5
3.	Pour calculer 3 + 5, l'enfant compte sur ses doigts. Commentaire: «Souvent, mais est-ce si grave?»	4
4.	Difficulté avec les symboles. L'enfant peut écrire 3 + = 5, 3 = + 5, 9 - 4 = 13.	3
5.	Commentaires: «La difficulté qui se présente à ce temps-ci (avril) est de partir d'une réalité concrète et de traduire celle-ci en opération mathématique» (1 enseignante) «Pour les soustractions, en utilisant la droite numérique  (représentant 6 - 4 = 2) 6 - 4 = 2 devient (peut être interprété par l'enfant?) 6 - 2 = 4». (1 enseignante) «Difficulté à retrouver les complémentaires d'un nombre: 3 + □ = 5; à additionner des nombres dont la somme se situe entre 10 et 20». (1 enseignante)	

[1] f désigne ici le nombre d'enseignants ayant fait une des observations (ou plusieurs) dans ce groupement de difficultés.

#	Situation			Réaction des sujets					
1	E.i	Op	E.f	Lou	R	NR	Pat	R	NR
	7	+ x	10	Trouve x=3 après avoir compté les 10 cubes de l'état final	*				
	14	+ x	24	Trouve x=7 après avoir compté les 24 cubes de l'état final		*			
	5	+ x	9				dit «neuf» au début, se reprend en comptant et trouve x = 4	*	
2	x	+ 3	7	Trouve x = 4	*				
	x	+ 3	10				Met 3 de côté parmi les 10 et trouve x=7	*	
3	10	+ 2	x	Trouve x = 12	*				
4	7	- x	5	Répond «Trois»		*			
	7	- x	4	Répond «Quatre euh ... deux ... trois»	?	?			
	10	- x	5	Répond »Sept»		*			
5	x	- 3	3	Compte les 3 cubes enlevés et les 3 cubes restants et trouve x = 6	*				
	x	- 4	8				Trouve x = 12	*	
6	12	- 3	x	Répond «Il en reste sept»		*			
	8	- 3	x	Répond «Il en reste... sept»		*			
	5	- 2	x				Compte sur ses doigts (cinq doigts, enlève deux doigts)	*	

E.i: état initial
E.f: état final
Op : opérateur

R: réussit
NR: ne réussit pas
Lou et Pat: les deux sujets de l'expérimentation

Annexe 5: Perception d'enfants face au symbolisme.

Equation présentée	Sujet	Réaction
3 = 7 - □	Dav	«Je commencerais là» (montre le 7, calcule avec ses doigts pour trouver 4)
	Pat	(fait 3 puis 7 avec ses doigts pour trouver 10; il écrit 10 dans □)
	Lou	(écrit 4 sans calculer sur ses doigts)
	Dan	(dit «huit», compte sur ses doigts, ... prend 8 doigts, enlève 7 doigts en comptant, se rend compte que ça ne donne pas 3, essaie 9 (même procédé ...), essaie 10 (même procédé) et écrit 10 dans □)
3 = □ - 7	Dav	«Je commencerais là» (montre le 7 du doigt, et écrit 4 dans après avoir compté sur ses doigts)
	Pat	«Ces maudites affaires-là ...» (il barre l'équation comme ça ~~3 = □ - 7~~) et il dit ensuite: «Je vais l'effacer!»
	Lou	(montre 7 doigts, puis enlève un doigt à la fois pour laisser 3 doigts levés. Il trouve ainsi 4 pour □)
	Dan	(écrit 4)

Annexe 6: Procédure utilisée et réactions des sujets face à l'égalité numérique.

Procédure

L'expérimentateur place douze (12) sous sur la table en 2 colonnes de six (6) sous: ces douze (12) sous représentent le prix d'un bonbon. Puis, il demande au sujet de prendre assez de sous (dans sa banque: c'est un sac contenant des sous) pour acheter le bonbon. Les 3 sujets parviennent facilement à prendre douze sous dans leur banque.
L'expérimentateur déplace la collection de sous du sujet en deux colonnes (une de quatre, l'autre de huit, ou de cinq et sept, etc): il dit au sujet qu'il a quatre sous dans une poche, puis huit sous dans une autre poche. Enfin, il demande au sujet s'il a assez de sous, dans ses deux poches, pour acheter le bonbon de douze sous.

Réactions des sujets.

Sujet	Réactions (S désigne le sujet)
Pat	E: ... En as-tu la même chose ici et là (montrant 4 et 8 sous) qu'ici (montrant les 12 sous)? S: Mais non! c'est tout différent! là, il y en a quatre! (en comptant), là, huit! (en comptant) et là, douze! E: (se rendant compte que P n'a pas saisi la situation) Mais dans tes deux poches, ici et là (montrant les 4 et 8 sous), ensemble, en as-tu la même chose qu'ici (les 12 sous). (E montre les 12 sous, puis les 4 et 8 sous ensemble). S: Place ensemble les 4 et 8 sous, puis les compte). Mais oui!
Lou	E: ... En as-tu assez pour acheter le bonbon? S: Non (il regarde les 4 sous) E: Pourquoi? S: J'en ai pas assez! E: Mais dans les deux poches ensemble (E montre les 4 et 8 sous) S: Oui E: Pourquoi? S: (compte les 2 tas de 4 et 8 sous, jusqu'à douze)

Annexe 6: (suite)

Sujet	Réactions
Dav	E: ... Maintenant, si tu as ça de sous (7 sous) dans une de tes poches, et dans une autre ça de sous (montre les 5 sous à côté des 7 sous), en as-tu assez pour acheter le bonbon? S: (Compte les 5 et 7 sous, jusqu'à douze) Oui. E: Juste assez? S: Oui!

Annexe 7: description de la première expérimentation

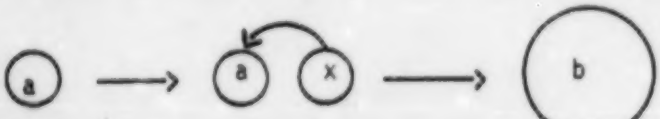
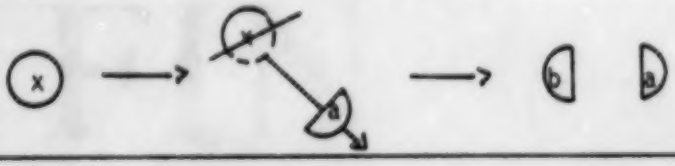
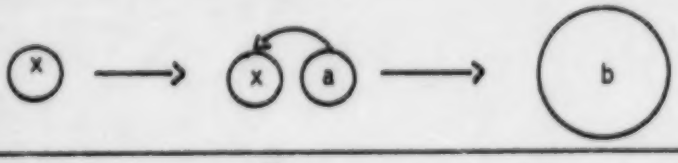
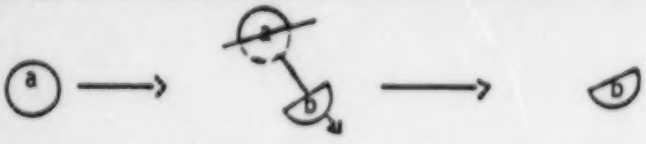
Note: Après chacune des formes de problèmes présentées au sujets (cf. tableau ci-dessous), l'expérimentateur écrit l'équation correspondant au problème (ex.: 12 - □ = 7) sur papier et demande au sujet:
«Qu'est-ce que ça veut dire pour toi?» (montrant l'équation)
«Peux-tu faire ce problème-là?» (laissant à la disposition du sujet des glands pour compter, du papier, un crayon)
«Vois-tu une ressemblance entre ceci (montrant l'équation) et le problème de l'écureuil (ou des poissons)?»
«Quel lien vois-tu?»

#	FORME DE PROBLEME	DESCRIPTION DE LA SITUATION PRESENTEE AU SUJET PAR L'EXPERIMENTATEUR
1	a - x = b	L'expérimentateur dépose des glands (a = 12) sur une table puis les fait compter par le sujet. L'expérimentateur dit qu'il y a un écureuil pendant la nuit qui vient chercher des glands (x) sans que le sujet voie combien l'écureuil vient en chercher. L'expérimentateur, après qu'il a enlevé un certain nombre de glands inconnu du sujet (x = 5), montre les glands restants (b = 7). Puis, il demande au sujet: «Combien de glands l'écureuil est venu chercher pendant la nuit?» «Comment as-tu fait pour trouver ce nombre?»
2	a + x = b	L'expérimentateur dépose des glands (a = 8) sur une table puis les fait compter par le sujet. Cette fois, un écureuil vient faire des provisions pour l'hiver en ajoutant des glands aux a = 8 glands, sans que le sujet voie combien l'écureuil (l'expérimentateur) ajoute de glands. L'expérimentateur montre les b glands et demande au sujet: «Combien de glands l'écureuil est-il venu ajouter?» «Comment as-tu fait pour trouver ce nombre?»
3	x - a = b	L'expérimentateur dépose des glands dans le nid d'un écureuil (une boîte fermée), sans que le sujet voie: ce nombre x de glands (13) est inconnu du sujet. Puis, l'expérimentateur dit que l'écureuil a faim, et qu'il vient manger des glands dans son nid. L'expérimentateur (l'écureuil) vient alors chercher a = 5 glands dans la boîte fermée, et les dépose à la vue du sujet et montre les b = 8 glands restants dans la boîte. L'expérimentateur demande au sujet: «Combien l'écureuil avait de glands dans son nid avant de manger ces 5 glands-là (montrant les a = 5 glands près de la boîte)?»

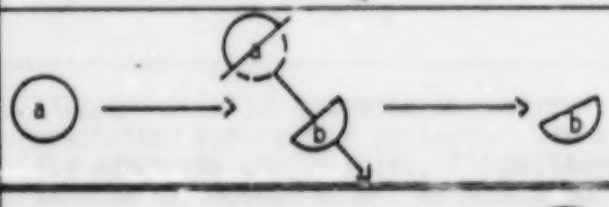
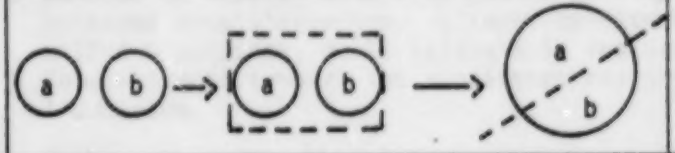
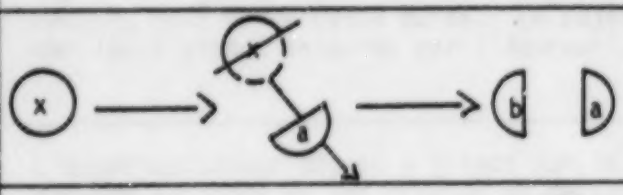
Annexe 7: (suite)

#	FORME DE PROBLEME	DESCRIPTION DE LA SITUATION PRESENTEE AU SUJET PAR L'EXPERIMENTATEUR
4	a + b = x	L'expérimentateur raconte au sujet que deux écureuils ont décidé de placer leurs glands dans le même nid (une boîte). L'expérimentateur dépose deux tas de glands sur la table (a = 7, b = 9) près du nid (de la boîte), et dit: «Voici les glands du premier écureuil (montrant a = 7 glands), et voici ceux du deuxième (montrant b = 9 glands). Combien auront-ils de glands quand ils les auront transportés dans leur nid?» «Comment as-tu fait pour trouver ce nombre?»
5	x + a = b	L'expérimentateur dispose de représentations de poissons découpés dans du carton, et d'un «aquarium» représenté par une boîte de carton. Il dit au sujet qu'il y a des poissons dans l'aquarium, en les déposant alors que le sujet a le dos tourné (x = 12 poissons). Puis, l'expérimentateur dépose ensuite des poissons (a = 3) à la vue du sujet en disant: «J'ai acheté ces trois poissons pour compléter ma collection de poissons que j'avais déjà». Montrant ensuite sa collection de poissons (b = 15), il demande au sujet: «Combien j'avais de poissons au début?» «Comment as-tu fait pour trouver ce nombre?»
6	a - b = x	L'expérimentateur place des «poissons» dans l'aquarium à la vue du sujet (a = 14), puis les fait compter par le sujet. L'expérimentateur dit: «Hier, j'avais ces poissons dans l'aquarium (l'expérimentateur fait compter ces poissons par le sujet) ... pendant la nuit, un «chat» est venu m'en manger trois (b = 3) (l'expérimentateur enlève 3 «poissons» de l'aquarium et les place à la vue du sujet et cache les poissons restants (x) en fermant la boîte (l'aquarium)». Puis l'expérimentateur demande: «Combien il me reste de poissons dans mon aquarium maintenant?» «Comment as-tu fait pour trouver ce nombre?»

Annexe 8: Représentation de la première expérimentation.

#	FORME DE PROBLEME	CE A QUOI FAIT FACE LE SUJET A CHAQUE ÉTAPE DE L'EXPÉRIMENTATION
		Début ⟶ Intervention ⟶ Fin
1	a - x = b	
2	a + x = b	
3	x - a = b	
4	a + b = x	
5	x + a = b	
6	a - b = x	

Annexe 9 : Représentation des types de problèmes

TYPE DE PROBLEME	FORME DE PROBLEME	CE A QUOI FAIT FACE LE SUJET A CHAQUE ETAPE DE L'EXPERIMENTATION	REMARQUE
		Début ⟶ Intervention ⟶ Fin	
CONCRET LIMITE	a - x = b		Totalité absente
	a - b = x		Totalité absente
CONCRET	a + b = x		Totalité présente
	a + x = b		Totalité présente
	x - a = b		Totalité présente
	x + a = b		Totalité présente

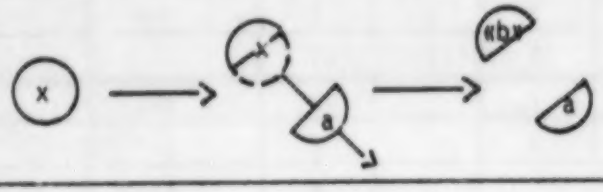
Annexe 10: Description de la troisième expérimentation

TYPE DE PROBLEME	FORME DE PROBLEME	DESCRIPTION DE LA SITUATION PRESENTEE AUX SUJETS PAR L'EXPERIMENTATEUR
CONCRET LIMITE MODIFIE	a - x = b	L'expérimentateur dépose a glands sur une table; puis, il demande au sujet de placer autant de jetons devant lui qu'il y a de glands. L'expérimentateur (l'écureuil) vient chercher x glands lorsque le sujet a le dos tourné. Le sujet voit les b glands qui résultent de la venue de l'écureuil et doit trouver les x glands enlevés par l'expérimentateur.
	a - b = x	L'expérimentateur présente un aquarium (représenté par une boîte) contenant a poissons. Ces a poissons ayant été dénombrés par le sujet, l'expérimentateur lui demande de déposer autant de jetons qu'il y a de poissons dans l'aquarium. L'expérimentateur (le chat), enlève b poissons, qu'il laisse à la vue du sujet. Celui-ci doit trouver les x poissons restants de l'aquarium.
CONCRET MODIFIE	a + b = x	Après que le sujet a compté les a puis les b glands présentés par l'expérimentateur, ce dernier dépose les a et b glands dans une boîte (le trou de l'écureuil), puis ferme cette boîte. Le sujet doit trouver les x glands enterrés par l'écureuil.
	a + x = b	L'expérimentateur dépose a glands sur la table, et demande au sujet de les compter et de les déposer dans la boîte (représentant un trou d'écureuil). L'expérimentateur (l'écureuil), pendant que le sujet a le dos tourné, dépose les x glands dans la boîte et la referme. Il dit au sujet qu'il y a maintenant «b» glands dans la boîte. Le sujet doit trouver le nombre x de glands ajoutés par l'écureuil dans son trou.

Annexe 10: (suite)

TYPE DE PROBLEME	FORME DE PROBLEME	DESCRIPTION DE LA SITUATION PRESENTEE AUX SUJETS PAR L'EXPERIMENTATEUR
CONCRET MODIFIE	x - a = b	L'expérimentateur dépose, pendant que le sujet a le dos tourné, x glands dans le trou de l'écureuil (une boîte fermée). Puis l'expérimentateur (l'écureuil) prend a glands de la boîte et les dépose sur la table en disant qu'il reste «b» glands dans la boîte refermée. Le sujet doit trouver le nombre x de glands qu'il y avait dans la boîte avant que l'écureuil enlève les a glands de son trou.
	x + a = b	L'expérimentateur dépose, pendant que le sujet a le dos tourné, x poissons dans l'aquarium (une boîte). Puis, il ajoute a poissons dénombrés par le sujet qu'il dépose dans l'aquarium, puis referme la boîte. Il dit au sujet qu'il y a maintenant «b» poissons dans l'aquarium. Le sujet doit trouver le nombre x de poissons qu'il y avait avant que l'expérimentateur ajoute les a poissons.

Annexe 11: Représentation des problèmes modifiés.

TYPE DE PROBLEME	FORME DE PROBLEME	CE A QUOI FAIT FACE LE SUJET A CHAQUE ETAPE DE L'EXPERIMENTATION	REMARQUE
		Début ⟶ Intervention ⟶ Fin	
CONCRET LIMITE MODIFIE	a - x = b		copie a' de la totalité présente
	a - b = x		copie a' de la totalité présente
CONCRET MODIFIE	a + b = x		«a» et «b» en mémoire de l'enfant et totalité absente
	a + x = b		«b» donné et totalité absente
	x - a = b		«b» donné et totalité absente
	x + a = b		«b» donné et totalité absente

* «a», «b»: désignent respectivement le nom du nombre représentant les quantités a et b.

Annexe 12: Tableau des résultats des sujets
pour les problèmes de type standard et modifié.

FORMES	TYPE CONCRET LIMITE					TYPE CONCRET				FORMES
	STANDARD		MODIFIE			STANDARD		MODIFIE		
	R	NR	R	NR		R	NR	R	NR	
a - x = b	x		x		Ise	x			x	a + b = x
	x		x		Fra	x		x		
	x		x		Isa	x		x		
	x		x		Mel	x			x	
		x	x		Syl	x		x		
Total	4	1	5	0		5	0	3	2	
a - b = x	x		x		Ise	x		*		a + x = b
		x	x		Fra	x		x		
		x	x		Isa	x		x		
	*		x		Mel	x		*		
	x		x		Syl	x		x		
Total	3	2	5	0		5	0	5	0	
					Ise	x		x		x - a = b
					Fra	x		*		
					Isa	x		x		
					Mel	I	I		x	
					Syl	I	I	*		
Total						3 (2I)	0(2I)	4	1	
					Ise	x		x		x + a = b
					Fra	x		x		
					Isa	x		*		
					Mel	x			x	
					Syl	x		*		
Total						5	0	4	1	

Annexe 13: Trois types de pédagogie: les grands traits que j'ai considérés pour identifier la pédagogie en vigueur dans les classes.

Types de pédagogie	Caractéristiques de l'enseignement selon ...	
	les situations d'apprentissage présentées aux élèves	le type d'activité de l'élève
1. Non traditionnelle	L'enseignant(e) fait souvent usage de situations «concrètes» c'est-à-dire, se rapprochant du vécu de l'élève.	L'élève utilise plusieurs de ses capacités intellectuelles; il cherche, questionne, découvre lui-même des procédés pour résoudre les problèmes ou situations présentées.
2. Moyennement traditionnelle	L'enseignant(e) fait parfois usage de situations «concrètes». Parfois aussi, les situations sont artificielles, sans lien avec la réalité de l'élève.	L'élève cherche, questionne et découvre par moments. Mais à d'autres moments, c'est l'enseignant(e) qui donne les trucs, les procédés que l'élève apprend ou applique dans les situations données.
3. Traditionnelle	L'enseignant(e) fait un usage courant de situations données verbalement ou par écrit (ou encore symboliquement) plutôt que des situations concrètes; le travail se fait directement dans des livres et sans lien direct avec le vécu de l'élève.	L'élève fait la plupart du temps des exercices stéréotypés, de la répétition, de la mémorisation de connaissances, de procédés donnés par l'enseigant(e); l'élève est rarement amené à découvrir par lui-même.

Annexe 14: description de la séance 1 (première partie)

Première partie:

(L'expérimentateur motive sa présence ...)

«Je suis à faire une petite recherche pour rendre les mathématiques plus faciles et plus intéressantes ... Les questions que je vais vous poser sont pour savoir qu'est-ce que vous pensez ...

(... puis il laisse le temps aux sujets de questionner, d'intervenir ... puis, quand les enfants semblent bien disposés ...)

«Alors, ça va? ... vous êtes prêts?»

(L'expérimentateur distribue les feuilles d'équation: voir p. 148

«Je vais vous distribuer ces feuilles-là ... mais il faut que je sache qui m'a écrit sur la feuille. Alors, écrivez votre nom au long!»

(une fois les feuilles toutes distribuées)

«Répondez dans les petites boîtes, sur la feuille ... vous écrivez le chiffre que vous pensez qui est correct ... montrez pas vos réponses aux autres! C'est ce que vous pensez qui m'intéresse! Quand vous aurez fini, dites-le moi».

(L'expérimentateur répond aux enfants qui ont des questions, il les encourage à l'occasion, sans leur expliquer des façons de procéder, des «trucs», etc.)

(Une fois que les sujets ont tous terminé ... l'expérimentateur ramasse les feuilles et fait une période d'objectivation)

«Qu'est-ce que vous pensez de ces questions?»

«Y en a-t-il que vous avez trouvées plus difficile que d'autres?»

(L'expérimentateur note les commentaires par écrit, au fur et à mesure)

Annexe 15: description de la séance 1 (deuxième partie)

Deuxième partie:

(L'expérimentateur amorce ainsi ...)

«. . je me demande aussi comment vous pensez quand vous pouvez prendre des petits cubes, avec des phrases mathématiques (équation) à peu près semblable, mais pas tout à fait les mêmes que tantôt.»

(des mini-cubes sont distribués à chacun des sujets: une vingtaine à chacun, et les feuilles d'équations sont distribuées)

«Je veux savoir qui écrit sur la feuille ... écrivez votre nom ... dans la petite boîte, écrivez le chiffre que vous pensez bon ... vous pouvez prendre les cubes pour compter.»

(L'expérimentateur répond aux enfants qui ont des questions; il les encourage à l'occasion, sans leur donner de «trucs». Une fois que les sujets ont tous terminé, l'expérimentateur ramasse les feuilles et fait une période d'objectivation).

«Ça m'intéresse de savoir ce que nous en pensez (de l'expérience) cette fois-ci.»

(L'expérimentateur prend note des commentaires des sujets par écrit).

Voici un exemplaire des deux feuilles distribuées aux sujets:

Séance 1, première partie:

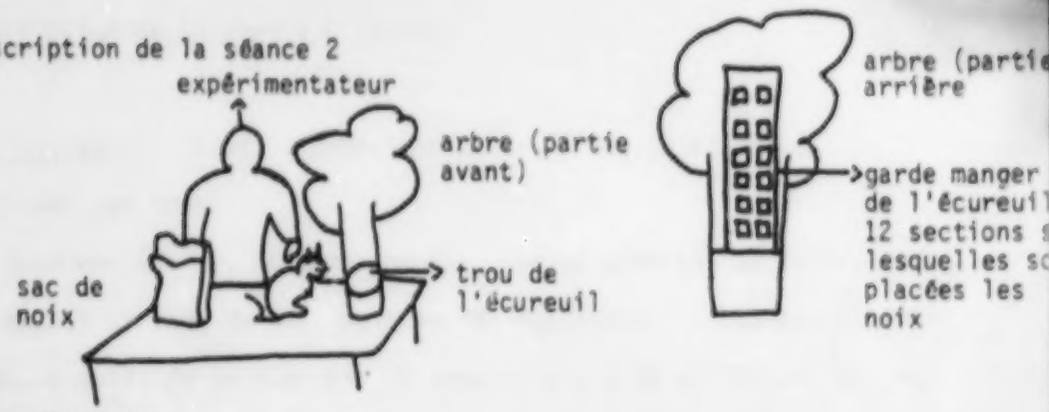
I Nom:	
7 + □ = 12	□ - 5 = 8
10 - 3 = □	□ + 4 =11
12 - □ = 8	3 + 4 =□
□ + 8 = 10	13 - 8 =□
6 + 7 = □	□ - 3 = 2
5 + □ = 8	9 - □ = 5

Séance 1, deuxième partie:

II Nom:	
8 - □ = 5	9 + 7 =□
11 - 5 =□	□ + 4 =11
8 + □ = 10	6 + 1 =□
12 - □ = 8	9 - 5 =□
4 + □ = 6	□ - 3 =10
□ - 5 = 4	□ + 2 = 7

Annexe 16: description de la séance 2

Le montage:



Voici la mise en situation:

(L'expérimentateur laisse le temps aux sujets d'examiner le «décor», de poser des questions ... de venir voir comment c'est fait, etc ... puis, il débute ainsi ...)

«Vous vous rappelez ce qu'on a fait la dernière fois, les calculs sans les petits cubes puis avec les petits cubes?

(laisser les enfants s'exprimer).

Maintenant, j'ai pensé à vous raconter une histoire pour mieux comprendre comment vous pensez.

Voici où va se dérouler l'histoire ...:

L'histoire se passe dans ma cour, derrière chez moi.

Je me suis acheté un sac de noix, et je l'ai placé sur ma table à pique-nique.

Non loin de là, il y a un arbre avec un trou ... c'est le trou de l'écureuil.

Il y a installé son garde manger. C'est là qu'il place ses noix. Lui, c'est l'écureuil. Derrière, il y a le petit bois. L'écureuil y va quelques fois.

Pendant que je vous raconterai l'histoire, je vais vous poser des questions.

Vous serez des détectives secrets. Je donne un carnet à chaque détective secret, pour écrire ses réponses secrètes. Un détective secret ne donne pas ses réponses aux autres!»

(L'expérimentateur distribue une feuille à chacun des sujets, numérotée de 1 à 6 pour les six questions)

«Ecrivez votre nom, je veux savoir le nom des détectives! Vous êtes prêts à suivre mon histoire?»

Annexe 16: description de la séance 2 (suite)

L'histoire de l'écureuil: (E est l'expérimentateur, S les sujets)

(l'écureuil est dans son trou)

«J'ai des noix dans mon sac ... Je vais compter combien j'en ai! (E compte les noix une à une en les sortant du sac, puis en les replaçant: il compte 13 noix). C'est maintenant la nuit, je vais dormir (E demande aux S de se fermer les yeux pour dormir) ... L'écureuil sort de son trou! ... pendant que je dors: il prend des noix ... les transporte dans son trou! (l'écureuil transporte effectivement des noix dans son garde-manger sans que les S voient: E fait le mime) ... Je me réveille c'est le matin (les S se réveillent aussi) ... Il me semble que j'ai entendu du bruit cette nuit ... je vais les compter dans mon sac ... (E compte avec S les noix, ... il compte une a une 9 noix). Il y avait 13 noix, maintenant, il en reste 9 dans mon sac! L'écureuil m'en a volé! (Puis, tout bas) Les détectives! Gardez votre réponse secrète! écrivez au numéro un: Combien l'écureuil a pris de noix dans mon sac? (E laisse le temps aux S de répondre). Ça va? ... je continue ...

uestion: 1

(L'écureuil mange quelques noix dans son trou). Crouch! crouch! ... Mais qu'est-ce qu'on entend? ... l'écureuil mange des noix! (l'écureuil s'en va dans le petit bois (derrière le bureau du professeur)). Je vais regarder dans son trou (E montre le garde-manger aux S). Il reste 2 noix dans son garde manger. Je vais les rapporter dans mon sac ... Maintenant, il reste plus de noix dans son garde-manger! (E montre le garde-manger vide). Je vais compter les noix de mon sac (E compte un à un avec les S). J'ai 11 noix. (L'écureuil revient du petit bois et vient au sac, puis apporte 5 noix dans son trou: E cache les noix dans sa main et les place dans le garde-manger, puis l'écureuil part dans le petit bois). Ah! ce coquin d'écureuil, il est pas peureux, il apporte des noix dans son arbre!

Annexe 16: description de la séance 2 (suite)

Le voilà reparti dans le petit bois, je vais regarder dans son garde-manger ... il a 5 noix (E compte). J'avais 11 noix, l'écureuil en a apporté 5 (E montre les

Question 2: 5 noix du garde-manger) dans son trou (puis, tout bas) Les détectives! gardez votre réponse secrète! écrivez au numéro deux combien il peut bien me rester de noix dans mon sac! (E laisse le temps aux S de répondre) Ça va? ... je continue ... (L'écureuil revient du petit bois) Il vient dans mon sac, devant mes yeux (l'écureuil transporte une à une les noix dans son trou: E les place dans le garde-manger). Il prend une, ... deux, ... six noix. Ah! le voilà qui repart dans le petit bois. Pendant qu'il est parti, regardons dans son garde-manger. (E compte avec les S un à un) Il avait apporté une, deux, ..., cinq noix, puis,

Question 3: une, deux, ... six noix! (puis, tout bas) Les détectives! gardez votre réponse secrète, écrivez au numéro trois: combien il a de noix dans son garde-manger maintenant? (E laisse le temps aux S de répondre) Ça va? ... je continue. (L'écureuil revient dans son trou) Crouch! Crouch! ... il croque des noix. (L'écureuil repart dans le petit bois). Pendant qu'il est parti, je vais en profiter pour voir dans son garde-manger! (E montre le garde-manger aux S). Une, deux, ..., sept noix. Bon, c'est déjà la nuit, je vais alors me coucher (les S aussi se ferment les yeux). Pendant la nuit l'écureuil transporte des noix (E prend 5 noix et les place dans le garde-manger) pendant que je dors. Le matin, je me réveille! (L'écureuil est dans le petit bois). Ah! l'écureuil est dans le petit bois, il y en avait ... 7 hier dans le garde-manger, allons voir maintenant combien il y en a, il me semble que j'ai entendu du bruit ...(E et S compte 12 noix).

Question 4: Il y en a 12! (puis, tout bas) Les détectives! Gardez votre réponse secrète, écrivez au numéro quatre: combien l'écureuil a transporté de noix pendant que je dormais cette nuit?

Annexe 16: description de la séance 2 (suite)

Ce matin-là, je suis bien fâché! Je vais aller à son garde-manger lui en prendre à ce petit coquin d'écureuil (E va prendre 9 noix et les place dans son sac, sans que les S voient). Je vais lui laisser quand même quelques noix! (L'écureuil revient). Ah! Le voici alors qui vient et qu'il croque toutes les noix ... Crouch! Crouch! ... et il retourne dans le petit bois. J'en profite pour regarder dans son garde-manger, il ne reste plus de noix. (E montre aux S le garde-manger vide). Puis, le voici qu'il revient et devant moi, transporte une, ..., deux noix dans son garde-manger, puis retourne dans le petit bois. Pendant qu'il est parti, je regarde dans son garde-manger, il y a 2 noix, puis je vais compter les noix de mon sac, il y en a une, deux, ..., sept! (E laisse à la vue les 7,

uestion: puis les 2 noix). (Puis, tout bas) Les détectives! gardez votre réponse secrète,

5 écrivez au numéro cinq: Combien il y avait de noix dans mon sac juste avant que l'écureuil prenne 2 noix? Ça va? ... on continue ...

C'est la nuit, je dors (S ferment les yeux) ... L'écureuil revient du petit bois en pleine nuit ... il transporte des noix et les met dans son garde-manger (E place 6 noix dans le garde-manger). Le matin, je me réveille, (S se réveillent), et en regardant par la fenêtre, je vois l'écureuil qui sort de son trou et vient dans mon sac ... il prend une, ..., deux, ... trois noix (l'écureuil transporte les noix une à une) et les place dans son garde-manger. Puis il repart dans le petit bois. Je compte dans son garde-manger pendant qu'il est parti! (E et S comptent 11 noix une, à une). Eh bien! l'écureuil a maintenant 11 noix, il déplace 3 noix ... (puis

Question: tout bas) Les détectives! gardez votre réponse secrète, écrivez au numéro six:

6 Combien il y avait de noix dans le garde-manger de l'écureuil juste avant qu'il vienne ce matin prendre 3 noix de mon sac?

Annexe 17: description de la séance 3

Le montage est le même que pour la séance 2.

Voici la mise en situation:

«Vous avez aimé l'histoire de l'écureuil? ... le jeu du détective secret? ... Je voudrais voir maintenant comment vous répondez aux questions si vous avez des petits cubes pour suivre l'histoire ... (E distribue une vingtaine de cubes à chacun des sujets). Pendant que je vous raconterai l'histoire, vous la suivrez en vous servant des cubes. Vous serez des détectives secrets. Je vous donne une feuille pour écrire vos réponses secrètes (E distribue les feuilles)».

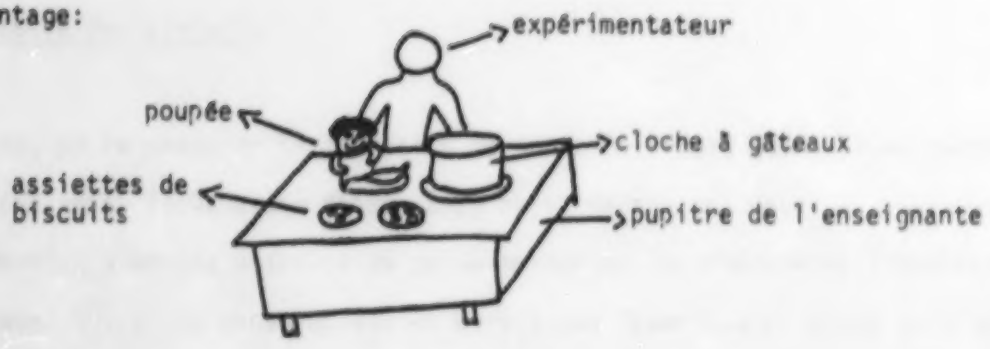
<u>L'histoire de l'écureuil</u>:

La description est la même que celle de l'annexe 16, sauf que les nombres impliqués ont été modifiés afin de ne pas conserver les mêmes réponses.

De plus, E demande aux sujets, aux questions 1 et 2, de placer le même nombre de minicubes qu'il vient de compter de noix.

Annexe 18: description de la séance 4.

Le montage:



Voici la mise en situation:

(L'expérimentateur laisse le temps aux sujets d'examiner la poupée, de toucher les objets, de poser des questions, de réagir, ... puis il débute ainsi ...).
«Je veux maintenant savoir comment vous pensez avec une autre histoire; je vais vous expliquer où ça se passe ... Mon garçon, Louis-Philippe, qui a six ans, voulait recevoir des amis pour un goûter dans l'après-midi, après avoir joué avec eux. Moi, je suis avec ma petite fille, Mélanie, qui a un an (la poupée), dans la maison. Pendant que Louis-Philippe est dehors avec ses amis, je prépare les biscuits. Ils sont dans le garde-manger (tiroir du pupitre de l'enseignante), et je les place dans une cloche à gâteaux sur la table de la cuisine ... Vous êtes prêts pour vous faire raconter l'histoire? Pendant que je vous la raconte, vous faites les détectives secrets.
(L'expérimentateur distribue une feuille à chacun des sujets, numérotée de 1 à 4 pour les quatre questions).
«Ecrivez votre nom ... vous êtes prêts?»

Annexe 18: description de la séance 4. (suite)

L'histoire des biscuits:

Mélanie, on va préparer la collation de Louis-Philippe, quand il va rentrer avec ses amis, il va avoir faim! Bon, on va mettre un, deux, ..., six biscuits (E prend un à un les biscuits du garde-manger et les place dans l'assiette, les S comptent) ... Je pense qu'ils en auront pas assez ... (E prend un à un des biscuits et les place dans une autre assiette) ... je vais en mettre encore dans cette autre assiette, un, deux, ..., cinq! Pour que les biscuits se conservent bien, je vais les placer sous cette cloche à gâteaux ... celle de 6 biscuits (E laisse tomber les six biscuits dans la cloche), puis celle des 5 biscuits

uestion: (puis, E remet le couvercle sur la cloche), (puis tout bas) Les détectives,

1 gardez votre secret! écrivez votre réponse au numéro un: Combien il y a de biscuits dans la cloche? (E laisse le temps aux S de répondre).

Ça va? ... on continue ...

Pendant que je suis au salon et que je regarde la T.V., Mélanie mange quelques biscuits (la poupée vient chercher 4 biscuits sous la cloche, sans que les sujets voient combien) ... je reviens dans la cuisine, et j'aperçois Mélanie qui vient de manger des biscuits! Je soulève le couvercle: il reste un, deux, ..., sept biscuits! (E prend un à un les biscuits et les compte avec les S en les plaçant dans une assiette). Je vais remettre des biscuits, ils en auront pas assez, Mélanie (E ajoute 5 biscuits à l'assiette de 7 sans que les S voient). Bon! ils en ont maintenant ... douze ... plaçons-les dans la cloche maintenant! (puis, tout

uestion: bas) Les détectives, gardez votre secret, écrivez votre réponse au numéro deux:

2 Combien j'ai ajouté de biscuits aux sept biscuits de la cloche à gâteaux? (E laisse le temps aux S de répondre) Ça va? ... on continue ...

Annexe 18: description de la séance 4. (suite)

Comme j'avais faim moi aussi, je prends quelques biscuits de la cloche. (E prend 3 biscuits de la cloche, sans que les S voient), et je vais les manger dans le salon. Mais comme je reviens, Mélanie venait de sortir 2 biscuits (la poupée a 2 biscuits dans ses mains) de la cloche à gâteaux. Mélanie! tu viens de prendre 2 biscuits! Combien il en reste dans la cloche? ... Il reste 7 biscuits! (puis, tout bas) Les détectives, gardez votre secret, écrivez votre réponse au numéro trois: Combien il y avait de biscuits sous la cloche juste avant que Mélanie en prenne 2 de la cloche? (E laisse le temps aux S de répondre) Ça va? ... on continue ... Mélanie, on va replacer tes 2 biscuits dans la cloche. Ils auront peut-être pas assez de biscuits, je vais en ajouter (E apporte la cloche à gâteaux au garde-manger, puis ajoute, sans que les S voient, 1 biscuit). Ouais! je vais en ajouter encore un, deux, ... trois (E montre aux S les biscuits). Bon! maintenant ils en ont assez pour leur collation! Ils en ont ... onze. (puis, tout bas) Les détectives, gardez votre secret! écrivez votre réponse au numéro quatre: Combien il y avait de biscuits dans la cloche juste avant que j'ajoute les 3 biscuits?

Question: 3

Question: 4

Annexe 19: description de la séance 5

Le montage est le même que pour la séance 4.

Voici la mise en situation:

«Vous vous rappelez l'histoire des biscuits? ... J'aimerais savoir comment vous répondez, les détectives, si je vous laisse des mini-cubes pour compter ...

Vous vous rappelez, mon garçon, Louis-Philippe joue dehors avec des amis, et je lui prépare une collation. Je suis avec ma petite fille Mélanie dans la maison.

L'histoire des biscuits:

La description est la même que celle de l'annexe 18, sauf que les nombres impliqués ont été modifiés afin de ne pas conserver les mêmes réponses.

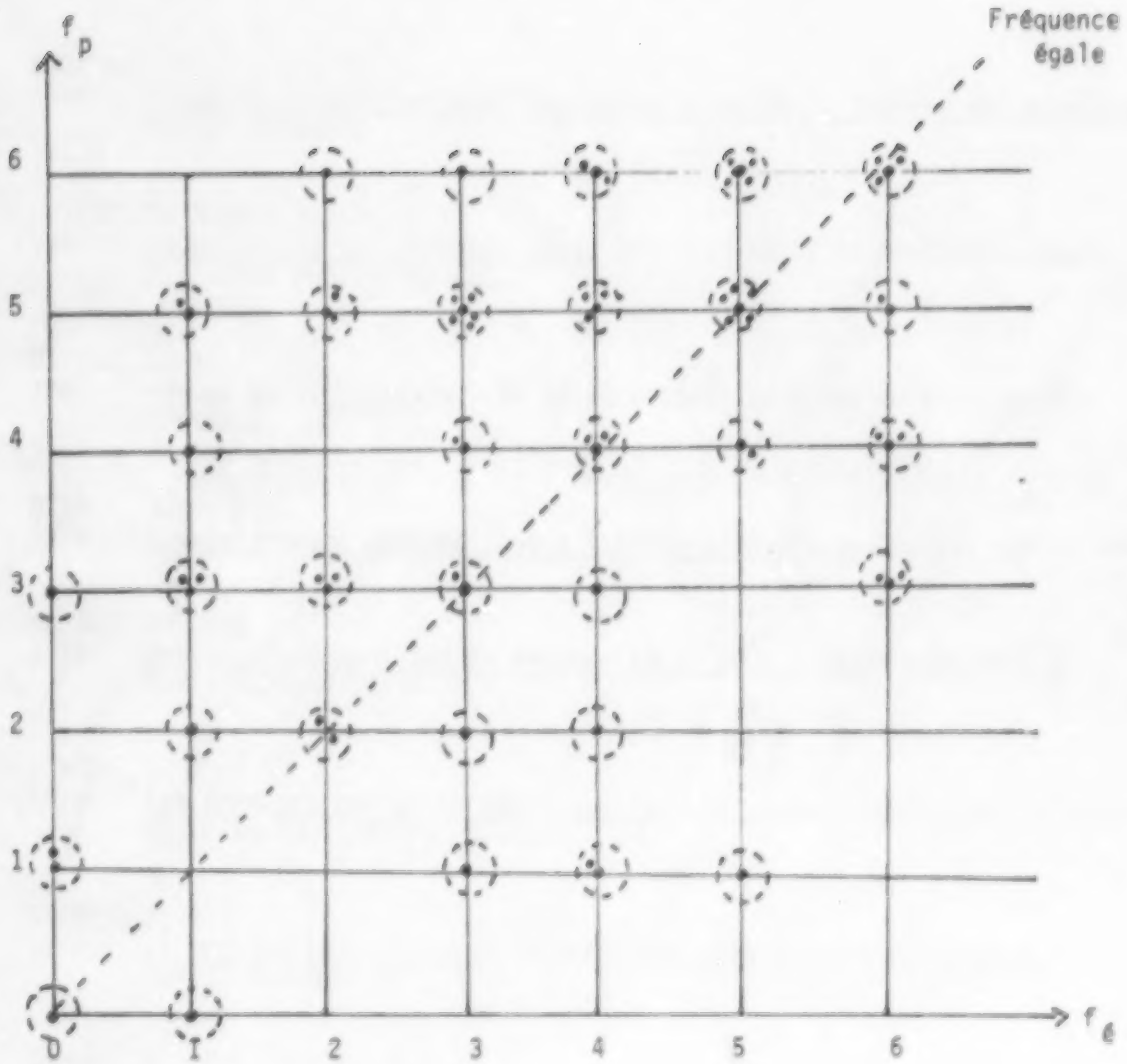
Annexe 20: Exemple d'un processus d'intériorisation

Cet exemple s'inspire de l'histoire de l'écureuil utilisée au cours des expérimentations: «Un écureuil place des noisettes dans son nid. Il transporte d'abord 5 noisettes, puis 8. Combien y a-t-il maintenant de noisettes dans son nid?»

A chacune des étapes présentées ci-dessous, il se a nécessaire de varier les sit"ations présentées.

Phases du processus	Manifestations observables chez l'élève
1. L'action effective	- L'élève utilise effectivement des noisettes pour résoudre le problème
2. La représentation graphique de l'opération	- L'élève représente l'opération qu'il vient d'effectuer par un dessin qu'il exécute lui-même. Par exemple, il pourra dessiner les noisettes, l'écureuil,...
3. La reconstitution intérieure de l'opération en s'appuyant sur la perception de son résultat concret	- Ayant devant lui le résultat final, soit les treize noisettes, l'élève redit en ses mots les opérations qu'il a faites
4. L'anticipation du résultat en pensée	- L'élève décrit les démarches qu'il fera en pensée seulement lorsque placé devant une situation concrète ou avec un appui intuitif
5. L'exécution de l'opération sans appui intuitif, sur le plan de la seule représentation	- Le problème est posé oralement et résolu en pensée seulement. A cette étape, l'élève utilise les signes arithmétiques introduits progressivement d'une façon significative et effectue ses calculs sur papier.

Annexe 21: Fréquence de réussite aux problèmes (f_p) en fonction de la fréquence de réussite aux équations ($f_é$) pour les sujets de l'échantillon (N = 74).



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AEBLI, H.
1966 Didactique psychologique, (4e éd.), Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

BEHR, M., S. E. WANGER et E. NICHOLS
1976 How children view equality sentences, P.M.D.C. Technical Report no. 3 (Service de reproduction ERIC, NO-ED 144 802).

BOURBAKI, N.
1964 Eléments de mathématique, fascicule 1, Livre 1, Théorie des ensembles, Paris: Hermann.

CHRISTIAN, ROBERT R.
1965 Introduction to logic and Sets, The University of British Columbia: Blaisdell Publishing Co.

DAYHAW, L.-T.
1966 Manuel de statistique, (3e éd.), Ottawa: Editions de l'université d'Ottawa.

DEZALY, R.
1973 L'enseignement mathématique à l'école élémentaire, Paris: Armand Colin.

DEZALY, R.
1973 Notions fondamentales de mathématiques pour l'école élémentaire, Paris: Armand Colin.

DIENES, Z. P.
1970 Les premiers pas en mathématique II. Ensembles, nombres et puissances, (4e éd.), Paris: O.C.D.L.

DIENES, Z. P.
1972 La mathématique vivante. Nombres naturels-entiers-rationnels, Paris: O.C.D.L.

DUMONT, M. et D. Gilis (Ed.)
1967 La mathématique commence. Projet mathématique Nuffield, Paris: O.C.D.L. (1972).

GOUTARD, M.
1963 Les mathématiques et les enfants, Paris: Delachaux et Niestlé.

HAMEL, M.et LUNKENBEIN, D.
1974 La mathématique à l'école élémentaire renouvelée. Volume 3. Les nombres naturels, Montréal: Les Editions Julienne.

LEGENDRE-BERGERON, M.-F.
1980 Lexique de la psychologie du développement de Jean Piaget, Chicoutimi: Gaétan Morin et associés Ltée.

PIAGET, J. et A. SZEMINSKA
1967 La genèse du nombre chez l'enfant, Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

PIAGET, J.
1969 Psychologie et pédagogie, Paris: Denoël.

SUPPES, PATRICK
1967 Axiomatic Set Theory, Princeton, N.J.: D.Van Nostrand.

WHEELER,
1967 Mathématique dans l'enseignement élémentaire. Modèles, patrons et situations de 6 à 12 ans, Paris: O.C.D.L. (1970).

Article de revue:

VERGNAUD, G.
1981 «Jean Piaget: quels enseignements pour la didactique», Revue française de pédagogie, octobre, novembre, décembre, No 57, 7-14.

Publications gouvernementales:

GOUVERNEMENT DU QUEBEC
1980 Programme d'étude. Primaire. Mathématique. Les nombres naturels. Direction générale du développement pédagogique.

GOUVERNEMENT DU QUEBEC
1982 Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Les nombres naturels. Direction générale du développement pédagogique.